

$$\text{所以} \begin{cases} (4+a)^2 - 8(a-1) > 0, \\ \frac{4+a}{2} > 0, \\ \frac{a-1}{2} > 0, \end{cases} \quad \text{解得 } a > 1.$$

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2}{x_1 \cdot x_2} =$$

$$\frac{(x_1 + x_2)^2}{x_1 \cdot x_2} - 2 = \frac{\left(\frac{4+a}{2}\right)^2}{\frac{a-1}{2}} - 2 =$$

$$\frac{(a+4)^2}{4} - 2 = \frac{(a-1+5)^2}{2(a-1)} - 2 =$$

$$\frac{(a-1)^2 + 10(a-1) + 25}{2(a-1)} - 2 = \frac{a-1}{2} +$$

$$\frac{25}{2(a-1)} + 3, \text{ 因为 } a > 1, \text{ 所以 } a-1 >$$

$$0, \text{ 所以 } \frac{a-1}{2} + \frac{25}{2(a-1)} + 3 \geq$$

$$2\sqrt{\frac{a-1}{2} \cdot \frac{25}{2(a-1)}} + 3 = 8, \text{ 即 } a = 6$$

时等号成立, 所以  $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$  的最小值为 8.

(3) 由题知,  $ax^2 + (b+1)x +$

$(b-1) = x (a \neq 0)$ , 所以  $ax^2 + bx + (b-1) = 0$ , 由于函数  $y = ax^2 + (b+1)x + (b-1) (a \neq 0)$  恒有不动点, 所以方程  $ax^2 + bx + (b-1) = 0$  的  $\Delta = b^2 - 4a(b-1) \geq 0$ , 即  $b^2 - 4ab + 4a \geq 0$ , 又因为  $b$  是任意实数, 所以方程  $b^2 - 4ab + 4a = 0$  的  $\Delta' = (-4a)^2 - 16a \leq 0$ , 即  $a(a-1) \leq 0 (a \neq 0)$ , 解得  $0 < a \leq 1$ , 所以实数  $a$  的取值范围是  $(0, 1]$ .

## §1 生活中的变量关系 & §2 函数

### 基础满分

1. A 【解析】小麦的总产量与种子、施肥量、水、日照时间等因素有相关关系, 但不一定是函数关系, 故 A 正确.

2. AC 【解析】A 中容器为柱体, 水的高度的变化速度应为直线型, 故 A 正确;

B 中容器下粗上细, 水的高度的变化速度先慢后快, 故 B 错误;

C 中容器上粗下细, 水的高度的变化速度应先快后慢, 故 C 正确;

D 中容器的瓶身为球体, 水的高度的变化为快—慢—快, 故 D 错误.

3. A 【解析】根据函数定义, 自变量每确定一个值, 因变量就有唯一确定的值与之对应, 根据题意, 水的沸点与气压符合这个对应关系, 而储油量与油面宽度的对应不唯一, 不符合定义. 故 ①④ 正确, 故 A 正确.

4. C 【解析】对于 C 的图象, 存在一

个  $x$  对应两个  $y$  的情况, 不符合函数的定义.

**易错警示** 忽略定义中函数值的唯一性而致错

在判断函数的图象时, 注意一定要满足一个自变量唯一对应一个函数值.

5. C 【解析】A 图中函数的值域不是  $[0, 1]$ , 故错误;

B 图中函数的定义域不是  $[0, 1]$ , 故错误;

C 图函数的定义域为  $[0, 1]$ , 值域为  $[0, 1]$ , 故正确;

D 图不满足函数的定义, 不是函数的图象, 故错误.

6. C 【解析】对于 A, 函数的定义域为  $\{x | x \geq 0\}$ , 两个函数的定义域不同, 不是同一函数, 故错误; 对于

B,  $y = \sqrt{x^2} = |x|$ , 对应关系不一致, 不是同一函数, 故错误; 对于 C, 函

数  $y = (\sqrt[3]{x})^3 = x$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 两个函数的定义域和对应关系相同, 是同一函数, 故正确; 对于 D, 函数的定义域为  $\{x | x \neq 0\}$ , 两个函数的定义域不同, 不是同一函数, 故

错误.

7. C 【解析】对于 A,  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $g(x)$  的定义域为  $\{x | x \neq \pm 1\}$ , 两个函数的定义域不同, 不是同一函数, 故错误;

对于 B,  $f(x) = -\sqrt{x^2} = -|x|$  与  $g(x) = -x$  的对应关系不同, 不是同一函数, 故正确;

对于 C,  $f(x) = \sqrt[3]{x^3} - 1 = x - 1$ , 故  $f(x)$  与  $g(t)$  的定义域都为  $\mathbf{R}$ , 对应关系也相同, 是同一函数, 故正确;

对于 D,  $\begin{cases} x+1 \geq 0, \\ x-1 \geq 0, \end{cases}$  解得  $x \geq 1$ , 即  $f(x)$  的定义域为  $\{x | x \geq 1\}$ , 而  $x^2 - 1 \geq 0$ , 解得  $x \geq 1$  或  $x \leq -1$ , 即  $g(x)$  的定义域为  $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ , 两个函数的定义域不同, 不是同一函数, 故错误.

8. D 【解析】要判断两个函数是否是同一函数, 需要从两个方面来分析, 即定义域和对应关系, 对于 A,  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $g(x)$  的定义域为  $\{x | x \neq 1\}$ , 两个函数的定义域不同, 故不是同一函数, 故错误; 对于 B,  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $g(x)$

的定义域为  $\{x|x \neq 0\}$ , 两个函数的定义域不同, 故不是同一函数, 故错误;

对于 C,  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $g(x)$  的定义域为  $\{x|x \geq 0\}$ , 两个函数的定义域不同, 故不是同一函数, 故错误;

对于 D,  $f(x)$  和  $g(x)$  的定义域都为  $\mathbf{R}$ , 对应关系也相同, 故是同一函数, 故正确.

**9. A** 【解析】要使函数有意义, 则  $1-x^2 \geq 0$ , 即  $x^2 \leq 1$ , 解得  $-1 \leq x \leq 1$ , 则函数的定义域为  $[-1, 1]$ , 故 A 正确.

**10. C** 【解析】由题意得  $\begin{cases} -x^2+5x+6 \geq 0, \\ x+1 \neq 0, \end{cases}$  解得  $-1 < x \leq 6$ , 故函数  $f(x)$  的定义域是  $(-1, 6]$ , 故 C 正确.

**11. C** 【解析】对于函数  $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{3x+2}} + x^0$ , 则  $\begin{cases} 3x+2 > 0, \\ x \neq 0, \end{cases}$  解得  $-\frac{2}{3} < x < 0$  或  $x > 0$ , 即函数的定义域为  $(-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, +\infty)$ , 故 C 正确.

**12. B** 【解析】根据题意, 集合  $A = \{x|y = \sqrt{2-x^2}\} = \{x|-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}$ ,  $B = \{x|x^2 - x - 12 \leq 0\} = \{x|-3 \leq x \leq 4\}$ , 故  $A \cap B = \{x|-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}$ , 故 B 正确.

**13. C** 【解析】 $\because$  函数  $f(x) = \sqrt{ax^2-ax+1}$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $\therefore ax^2-ax+1 \geq 0$  对任意实数  $x$  恒成立.  
若  $a = 0$ , 不等式化为  $1 \geq 0$ , 恒成立;  
若  $a \neq 0$ , 则  $\begin{cases} a > 0, \\ (-a)^2 - 4a \leq 0, \end{cases}$  解得  $0 < a \leq 4$ . 综上所述,  $a$  的范围是  $[0, 4]$ , 故 C 正确.

**易错警示** 忘记讨论最高次项的系数为 0 的情况而致错

针对最高次项系数含参的函数, 注意讨论其最高次项系数为 0 的情况.

**14. D** 【解析】 $\because$  函数  $y = \frac{3x}{kx^2+2kx+1}$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $\therefore$  关于  $x$  的方程  $kx^2+2kx+1=0$  无解.

当  $k=0$  时,  $1=0$  显然无解, 符合题意; 当  $k \neq 0$ , 则  $\Delta = 4k^2 - 4k < 0$ , 解得  $0 < k < 1$ .

综上可得,  $0 \leq k < 1$ , 故 D 正确.

**15. D** 【解析】 $\because$  函数  $f(x) = x^2 - 1 \geq -1$ ,  $\therefore f(x)$  的值域为  $[-1, +\infty)$ , 即  $A = [-1, +\infty)$ , 观察四个选项,  $-2$  不是  $A$  中的元素, 故 D 错误.

**16. B** 【解析】函数  $y = -x^2 + 6x$  的图象是一条开口向下的抛物线, 对称轴为  $x=3$ , 所以该函数在  $x=3$  时取得最大值 9, 所以  $y_{\max} = 9$ . 又  $x=0$  时,  $y=0$ ;  $x=5$  时,  $y=5$ , 所以  $y_{\min} = 0$ , 即函数的值域为  $[0, 9]$ , 故 B 正确.

**17. C** 【解析】因为  $\sqrt{x-1} \geq 0$ , 所以  $f(x) = 1 + 2\sqrt{x-1} \geq 1$ , 所以函数的值域为  $[1, +\infty)$ .

**18. D** 【解析】因为  $x^2 + 3 \geq 3$ , 根据反比例函数的图象, 可以得到  $0 < \frac{1}{x^2+3} \leq \frac{1}{3}$ , 故函数  $y = \frac{1}{x^2+3}$  的值域为  $(0, \frac{1}{3}]$ , 故 D 正确.

**19. B** 【解析】 $\because y = \frac{2(x-3)+7}{x-3} = 2 + \frac{7}{x-3}$ ,  $\therefore \frac{7}{x-3} \neq 0$ ,  $\therefore y = 2 + \frac{7}{x-3} \neq 2$ ,  $\therefore$  函数  $y$  的值域为  $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ . 故 B 正确.

**20. B** 【解析】函数  $y = x^2 - 2x + 2$  的图象的对称轴为  $x=1$ ,

若  $x \in [-1, 0]$ , 当  $x=0$  时  $y_{\min} = 2$ , 当  $x=-1$  时  $y_{\max} = 5$ , 值域为  $[2, 5]$ , 故 A 错误;

若  $x \in [0, \frac{3}{2}]$ , 当  $x=1$  时  $y_{\min} = 1$ , 当  $x=0$  时  $y_{\max} = 2$ , 值域为  $[1, 2]$ , 故 B 正确;

若  $x \in [1, 3]$ , 当  $x=1$  时  $y_{\min} = 1$ , 当  $x=3$  时  $y_{\max} = 5$ , 值域为  $[1, 5]$ , 故 C 错误;

若  $x \in [-1, 1]$ , 当  $x=1$  时  $y_{\min} = 1$ , 当  $x=-1$  时  $y_{\max} = 5$ , 值域为  $[1, 5]$ , 故 D 错误.

**21. D** 【解析】由  $1-4x \geq 0$  得  $x \leq \frac{1}{4}$ , 设  $t = \sqrt{1-4x}$ , 则  $t \geq 0$ , 且  $t^2 = 1-4x$ , 即  $x = \frac{1-t^2}{4}$ ,

则  $f(x)$  等价于  $y = \frac{1-t^2}{4} + t =$

$-\frac{1}{4}(t-2)^2 + \frac{5}{4}$ , 抛物线开口向下, 对称轴为  $t=2$ .

$\because t \geq 0$ ,  $\therefore$  当  $t=2$  时函数取得最大值  $\frac{5}{4}$ , 即  $f(x) \leq \frac{5}{4}$ , 即函数

$f(x)$  的值域为  $(-\infty, \frac{5}{4}]$ , 故 D 正确.

**易错警示** 两函数值域直接求并集致错

由两个函数相加得到的新函数, 求其值域时不能只是两个值域直接求并集, 而是要新函数整体求值域.

**22. A** 【解析】依题意,  $ax^2+bx+c \geq 0$  的解集为  $[0, 1]$ , 故函数  $y = ax^2 + bx + c$  的图象开口向下,  $a < 0$ , 则方程  $ax^2+bx+c=0$  的两根为  $x=0$  或  $1$ , 则  $c=0$ ,  $-\frac{b}{2a} = \frac{0+1}{2}$ , 即  $a = -b$ , 则  $y = ax^2 + bx + c = ax^2 - ax = a(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{a}{4}$ , 当  $x = \frac{1}{2}$  时,  $y =$

$a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{a}{4}$  取得最大值为 1,  
即  $-\frac{a}{4} = 1$ , 解得  $a = -4$ , 故 A  
正确.

**23. D** 【解析】 $f(x) - g(x) = x + 3 - (x+1)^2 = -(x+2)(x-1)$ , 因为  $x \in [-3, 1]$ , 当  $-3 \leq x < -2$  时,  $f(x) - g(x) = -(x+2)(x-1) < 0$ ,  $f(x) < g(x)$ , 所以  $M(x) = (x+1)^2$ ;  
当  $-2 \leq x \leq 1$  时,  $f(x) - g(x) = -(x+2)(x-1) \geq 0$ ,  $f(x) \geq g(x)$ , 所以  $M(x) = x+3$ .  
当  $-3 \leq x < -2$  时,  $M(x) = (x+1)^2$  的函数值随着  $x$  的增大而减小, 所以  $M(-2) < M(x) \leq M(-3)$ , 即  $1 < M(x) \leq 4$ ; 当  $-2 \leq x \leq 1$  时,  $M(x) = x+3$  的函数值随着  $x$  的增大而增大, 所以  $M(-2) \leq M(x) \leq M(1)$ , 即  $1 \leq M(x) \leq 4$ . 综上,  $1 \leq M(x) \leq 4$ , 即  $M(x)$  的值域为  $[1, 4]$ , 故 D 正确.

**24. C** 【解析】第一段时间, 该生骑车时函数解析式为直线方程形式, 距离不断增加. 第二段时休息, 此时距离起点的距离不变, 此时休息期间距离为常数, 然后原路返回, 此时距离减小, 然后调转车头继续前进, 此时距离逐步增加, 故 C 正确.

**25. A** 【解析】 $\because$  当  $x=1$  或  $x=2$  时,  $g(1) = g(2) = 1$ ,  $\therefore f(g(1)) = f(g(2)) = f(1) = 4$ ;  
当  $x=3$  或  $x=4$  时,  $g(3) = g(4) = 3$ ,  $\therefore f(g(3)) = f(g(4)) = f(3) = 2$ . 故  $f(g(x))$  的值域为  $\{2, 4\}$ , 故 A 正确.

**26. C** 【解析】设  $\sqrt{x}+1=t (t \geq 1)$ , 则  $x=(t-1)^2$ ,  $f(t)=(t-1)^2+2=t^2-2t+3$ , 即  $f(x)=x^2-2x+3 (x \geq 1)$ , 故 C 正确.

**27. ACD** 【解析】对于 A,  $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - x = -f(x)$ , 故正确;

对于 B,  $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + x \neq -f(x)$ , 故错误;

对于 C,  $f\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} -x (0 < x < 1), \\ 0 (x = 1), \\ \frac{1}{x} (x > 1), \end{cases}$  满足

$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ , 故正确;

对于 D,  $f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^3} + x^3 = -f(x)$ , 故正确.

**28. A** 【解析】由题意可得,  $f(3) = 3 - 2 = 1$ .

**29. B** 【解析】 $x \leq 2$  时,  $f(x) = -(x-1)^2 + 3 \leq 3$ ;  $x > 2$  时,  $f(x) = \frac{6}{x} \in (0, 3)$ ,  $\therefore f(x)$  的值域为  $(-\infty, 3]$ , 故 B 正确.

**30. D** 【解析】当  $x > 1$  时,  $f(x)$  的值域为  $(1, +\infty)$ . 当  $a=0$  时,  $f(x) = \begin{cases} x, x > 1, \\ 2x, x \leq 1, \end{cases}$  符合题意;  
当  $a > 0$  时, 函数  $y = ax^2 + 2x$  的图象开口向上, 不符合题意;

当  $a < 0$ , 且  $-\frac{2}{2a} \leq 1$ , 即  $a \leq -1$  时,

$f(x)$  在  $(-\infty, 1]$  上的最大值为  $f\left(-\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{a}$ , 由题意可得  $-\frac{1}{a} \geq 1$ , 解得  $0 > a \geq -1$ , 故  $a = -1$ ;

当  $a < 0$ , 且  $-\frac{2}{2a} > 1$ , 即  $-1 < a < 0$  时,

$f(x)$  在  $(-\infty, 1]$  上的最大值为  $f(1) = a+2$ , 由题意可得  $a+2 \geq 1$ , 解得  $a \geq -1$ , 故  $-1 < a < 0$ . 综上,  $a$  的取值范围是  $[-1, 0]$ , 故 D 正确.

**31.**  $\begin{cases} x+2, -2 \leq x \leq 0, \\ x^2-4x+2, 0 < x \leq 3 \end{cases}$  【解析】当

$x \in [-2, 0]$  时, 设  $f(x) = kx + b$  ( $k \neq 0$ ).

将  $(-2, 0)$ ,  $(0, 2)$  代入可得  $\begin{cases} -2k+b=0, \\ b=2, \end{cases}$  解得  $k=1, b=2$ , 即  $f(x) = x+2$ .

当  $x \in (0, 3]$  时, 设  $f(x) = a(x-2)^2 - 2$ , 将点  $(3, -1)$  代入可得  $-1 = a(3-2)^2 - 2$ , 解得  $a=1$ ,  $\therefore f(x) = (x-2)^2 - 2 = x^2 - 4x + 2$ ,

$\therefore f(x) = \begin{cases} x+2, -2 \leq x \leq 0, \\ x^2-4x+2, 0 < x \leq 3. \end{cases}$

**32. 【解】**(1)  $\because f(x) = \begin{cases} 3x+5, x \leq 0, \\ x+5, 0 < x < 1, \\ -2x+8, x \geq 1, \end{cases}$

$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 5 = \frac{11}{2}$ ,

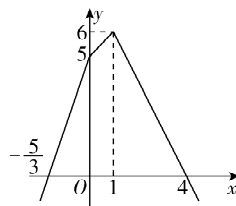
$\therefore f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(\frac{11}{2}\right) = -2 \times \frac{11}{2} + 8 = -3$ .

(2)  $\because f(x) = \begin{cases} 3x+5, x \leq 0, \\ x+5, 0 < x < 1, \\ -2x+8, x \geq 1, \end{cases}$

$f(a) = 2, \therefore \begin{cases} a \leq 0, \\ 3a+5=2 \end{cases}$  或

$\begin{cases} 0 < a < 1, \\ a+5=2 \end{cases}$  或  $\begin{cases} a \geq 1, \\ -2a+8=2, \end{cases}$  解得  $a = -1$  或  $a = 3$ .

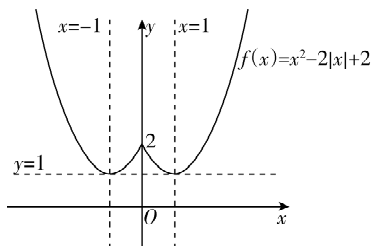
(3) 作出函数  $f(x)$  的图象如下图所示:



由图象得,  $f(x)$  的最大值为  $f(1) = 6$ , 故函数  $f(x)$  的值域为  $(-\infty, 6]$ .

**33. 【解】**(1)  $f(x) = x^2 - 2|x| + 2 = \begin{cases} x^2 - 2x + 2, x \geq 0, \\ x^2 + 2x + 2, x < 0, \end{cases}$

则  $f(x)$  的图象如图所示:



(2)  $f(x) = x^2 - 2|x| + 2 = (|x| - 1)^2 + 1 \geq 1$ , 当且仅当  $|x| = 1$ , 即  $x = \pm 1$  时等号成立, 结合图象可得  $f(x)$  的值域为  $[1, +\infty)$ .

### 7. 重难上分

**1. D** 【解析】 $\because$  函数  $f(x)$  的定义域为  $[0, 3]$ ,  $\therefore 0 \leq x \leq 3$ ,  $\therefore$  在函数  $y = f(x^2 - 1)$  中,  $0 \leq x^2 - 1 \leq 3$ , 解得  $-2 \leq x \leq -1$  或  $1 \leq x \leq 2$ , 故函数  $y = f(x^2 - 1)$  的定义域为  $[-2, -1] \cup [1, 2]$ , 故 D 正确.

**2. D** 【解析】 $\because f(x)$  的定义域为  $[1, +\infty)$ ,  $\therefore$  由  $\begin{cases} x-1 \geq 1, \\ 4-x \geq 1, \end{cases}$  解得  $2 \leq x \leq 3$ . 即函数  $y = f(x-1) + f(4-x)$  的定义域为  $[2, 3]$ , 故 D 正确.

**3. B** 【解析】依题意, 函数  $f(x^2)$  的定义域为  $[-1, 2]$ , 所以  $-1 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq x^2 \leq 4$ , 所以  $f(x)$  的定义域是  $[0, 4]$ , 故 B 正确.

### 易错警示 对复合函数的定义域理解错误

函数的定义域是函数自变量  $x$  的取值范围, 即若函数  $f(g(x))$  的定义域为  $A$ , 指的是  $x \in A$ , 而不是  $g(x) \in A$ . 最后求解的定义域的范围, 也是指的  $x$  的范围.

**4. C** 【解析】 $\because$  函数  $y = f(2x)$  的定义域为  $[-2, 4]$ , 则  $-2 \leq x \leq 4$ , 可得  $-4 \leq 2x \leq 8$ ,  $\therefore$  函数  $y = f(x)$  的定义域为  $[-4, 8]$ , 对于函数  $y = f(x+1)$ , 则  $-4 \leq x+1 \leq 8$ , 得  $-5 \leq x \leq 7$ ,  $\therefore y = f(x+1)$  的定义域为  $[-5, 7]$ . 故 C 正确.

**5. A** 【解析】由已知可得,  $\begin{cases} 0 \leq 2x \leq 6, \\ x-2 \neq 0, \end{cases}$  解得  $0 \leq x < 2$  或  $2 < x \leq 3$ , 故 A 正确.

**6. D** 【解析】因为函数  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ , 对于函数  $y = \frac{f(x-1)}{\sqrt{-x^2+3x+4}}$ , 则  $\begin{cases} x-1 > 0, \\ -x^2+3x+4 > 0, \end{cases}$  解得  $1 < x < 4$ , 即函数  $y = \frac{f(x-1)}{\sqrt{-x^2+3x+4}}$  的定义域是  $(1, 4)$ , 故 D 正确.

**7. B** 【解析】因为函数  $f(x)$  是一次函数, 则设  $f(x) = ax + b (a \neq 0)$ , 因为  $f(x-1) = 4x + 3$ , 所以  $a(x-1) + b = 4x + 3$ , 则  $\begin{cases} a = 4, \\ -a + b = 3, \end{cases}$  解得  $a = 4$ ,  $b = 7$ , 所以函数  $f(x) = 4x + 7$ , 故 B 正确.

**8. B** 【解析】令  $\sqrt{x} - 2 = t$ , 则  $t \geq -2$ , 所以  $f(t) = (t+2)^2 - 4(t+2) + 5 = t^2 + 1 (t \geq -2)$ , 则  $f(x) = x^2 + 1 (x \geq -2)$ , 故 B 正确.

### 易错警示 换元时忽略函数的

#### 定义域

利用换元法求解函数的解析式时, 要注意换元前后函数的定义域是否发生变化.

**9. C** 【解析】因为  $f\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2$ , 所以  $f(x) = x^2 + 2$ , 所以  $f(x+1) = (x+1)^2 + 2$ , 即  $f(x+1) = x^2 + 2x + 3$ , 故 C 正确.

**10. D** 【解析】已知函数  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ .

$$\text{因为 } f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 6x + \frac{4}{x} \text{ ①,}$$

$$\text{所以 } 2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 4x + \frac{6}{x} \text{ ②,}$$

$$\text{由 ②} \times 2 - \text{①} \text{ 得 } 3f(x) = 2x + \frac{8}{x},$$

$$\text{所以 } f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{8}{3x} \geq$$

$2\sqrt{\frac{2x}{3} \times \frac{8}{3x}} = \frac{8}{3}$ , 当且仅当  $\frac{2}{3}x = \frac{8}{3x}$ , 即  $x = 2$  时取等号, 所以  $f(x)$  的最小值为  $\frac{8}{3}$ , 故 D 正确.

**11.  $\frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{1}{3} (x > 0)$**  【解析】因为定义在  $(0, +\infty)$  上的函数  $g(x)$  满足  $g(x) = 2\sqrt{x} \cdot g\left(\frac{1}{x}\right) - 1$ , 将  $x$  换成  $\frac{1}{x}$  可得  $g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{\sqrt{x}} \cdot g(x) - 1$ , 将其代入上式可得  $g(x) = 2\sqrt{x} \cdot g\left(\frac{1}{x}\right) - 1 = 2\sqrt{x} \cdot \left[\frac{2}{\sqrt{x}} \cdot g(x) - 1\right] - 1 = 4g(x) - 2\sqrt{x} - 1$ , 所以  $g(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{1}{3} (x > 0)$ .

**12.  $f(x) = x^2$  (答案不唯一)**

【解析】 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$  中, 令  $x = y = 0$ , 解得  $f(0) = 0$ , 令  $y = -x$ , 得  $f(x-x) = f(x) + f(-x) - 2x^2$ , 故  $f(x) + f(-x) = 2x^2$ , 不妨设  $f(x) = x^2$ , 满足要求. (答案不唯一)

### §1 & §2 考点训练

**1. D** 【解析】对于 A, 函数  $y = -x$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 值域也为  $\mathbf{R}$ , 不符合题意;

对于 B, 函数  $y = \sqrt{x}$  的定义域和值域都为  $[0, +\infty)$ , 不符合题意;

对于 C,  $y = \frac{2}{x}$  的定义域和值域都为  $\{x | x \neq 0\}$ , 不符合题意;

对于 D,  $y = \begin{cases} x-2, & x \leq 0, \\ x+2, & x > 0 \end{cases}$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 当  $x \leq 0$  时,  $y = x-2 \leq -2$ , 当  $x > 0$  时,  $y = x+2 > 2$ , 所以值域为  $(-\infty, -2] \cup (2, +\infty)$ , 定义域和值域不相同, 符合题意.

**2. CD** 【解析】对于 A, 函数  $y = \frac{|x|}{x}$



的定义域为  $\{x|x \neq 0\}$ , 函数  $y=1$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 两函数定义域不同, 故不是同一函数, 故错误;

对于 B, 函数  $y=\sqrt{(x-1)^2}$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 化简可得  $y=|x-1|$ , 与  $y=x-1$  解析式不同, 故不是同一函数, 故错误;

对于 C, 函数  $y=\frac{(\sqrt{x})^2}{x}$  的定义域为  $\{x|x>0\}$ , 化简可得  $y=1(x>0)$ , 函数  $y=\frac{x}{(\sqrt{x})^2}$  的定义域为  $\{x|x>0\}$ , 化简可得  $y=1(x>0)$ , 故为同一函数, 故正确;

对于 D, 函数  $y=\frac{x^3+x}{x^2+1}$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 化简可得  $y=x$ , 故为同一函数, 故正确.

**3. D 【解析】** 由函数  $f(2x-1)$  的定义域为  $[-1, 1]$ , 即  $-1 \leq x \leq 1$ , 得  $-3 \leq 2x-1 \leq 1$ , 因此由函数  $y=\frac{f(x-1)}{\sqrt{x-1}}$  有意义, 得  $\begin{cases} -3 \leq x-1 \leq 1, \\ x-1 > 0, \end{cases}$  解得  $1 < x \leq 2$ , 所以函数  $y=\frac{f(x-1)}{\sqrt{x-1}}$  的定义域为  $(1, 2]$ , 故 D 正确.

**4. D 【解析】** 因为  $f(xy)=f(x)+f(y)$ , 令  $x=y=3$ , 则  $f(3)+f(3)=f(9)$ , 即  $2f(3)=6$ , 可得  $f(3)=3$ ; 令  $x=y=\sqrt{3}$ , 则  $f(\sqrt{3})+f(\sqrt{3})=f(3)$ , 即  $2f(\sqrt{3})=3$ , 可得  $f(\sqrt{3})=\frac{3}{2}$ ; 令  $x=3, y=\sqrt{3}$ , 可得  $f(3\sqrt{3})=f(3)+f(\sqrt{3})=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$ . 故 D 正确.

**5. B 【解析】** 当  $x>0$  时,  $f(x)=x+\frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}=2$ , 由此可知 CD

错误;

当  $x<0$  时,  $f(x)=-x+\frac{1}{x}$ ,  $f(-2)=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}>0$ , 故 A 错误, B 正确.

**6. [0, 4) 【解析】** 由题意,  $mx^2+mx+1 \neq 0$  在  $x \in \mathbf{R}$  上恒成立, 当  $m=0$  时,  $mx^2+mx+1=1$  满足要求; 当  $m \neq 0$  时, 只需  $\Delta=m^2-4m<0$ , 即  $0<m<4$ . 综上, 实数  $m$  的取值范围是  $[0, 4)$ .

**7. 【解】** (1) 由  $\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ 4-x > 0, \end{cases}$  得  $1 \leq x < 4$ , 即  $A=[1, 4)$ ,  $\therefore \complement_{\mathbf{R}}A=\{x|x<1 \text{ 或 } x \geq 4\}$ , 由  $x^2-3x-10 \leq 0$ , 得  $-2 \leq x \leq 5$ , 即  $B=\{x|-2 \leq x \leq 5\}$ ,  $\therefore (\complement_{\mathbf{R}}A) \cap B = [-2, 1) \cup [4, 5]$ .

(2) 由题意知  $C \subseteq B$ .

由 (1) 知  $B=\{x|-2 \leq x \leq 5\}$ , 由  $C \subseteq B$  得  $\begin{cases} a-1 \geq -2, \\ a+1 \leq 5, \end{cases}$  解得  $-1 \leq a \leq 4$ .

综上所述, 实数  $a$  的取值范围为  $[-1, 4]$ .

**8. 【解】** (1) 设二次函数  $f(x)=ax^2+bx+c(a \neq 0)$ . 因为  $f(0)=c=1$ , 所以  $f(x)=ax^2+bx+1$ . 由  $f(x+1)=f(x)-2x+2$ , 得  $a(x+1)^2+b(x+1)+1=ax^2+bx+1-2x+2$ , 得  $ax^2+(2a+b)x+a+b+1=ax^2+(b-2)x+3$ , 所以  $\begin{cases} 2a+b=b-2, \\ a+b+1=3, \end{cases}$  得  $\begin{cases} a=-1, \\ b=3, \end{cases}$  故  $f(x)=-x^2+3x+1(x \in \mathbf{R})$ .

(2) 当  $x<1$  时,  $g(x)=-x^2+3x+1$ , 其图象的对称轴为  $x=-\frac{3}{2 \times (-1)}=\frac{3}{2}$ , 则  $g(x)<g(1)=3$ ;

$\frac{3}{2}$ , 则  $g(x)<g(1)=3$ ;

当  $x \geq 1$  时,  $g(x)=x+\sqrt{x-1}+3$ , 令  $t=\sqrt{x-1}, t \geq 0$ , 则  $x=t^2+1$ ,

$y=t^2+1+t+3=t^2+t+4$ , 其图象的对称轴为  $t=-\frac{1}{2}$ , 所以当  $t \geq 0$  时,  $y \geq 4$ .

综上所述,  $g(x)$  的值域为  $(-\infty, 3) \cup [4, +\infty)$ .

**9. 【解】** (1) 因为  $f(3)=4-3^2=4-9=-5$ , 所以  $f(f(3))=f(-5)=-f(5)=-(-4-5^2)=25-4=21$ .

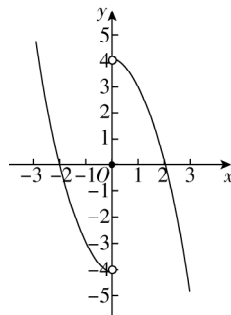
(2) 因为  $\forall x \in \mathbf{R}, f(-x)+f(x)=0$ , 令  $x=0$ , 可得  $f(0)=0$ .

设  $x<0$ , 则  $-x>0, f(-x)=4-(-x)^2=4-x^2$ , 又  $f(-x)=-f(x)$ ,

所以  $f(x)=-f(-x)=x^2-4(x<0)$ ,

$$\text{故 } f(x)=\begin{cases} 4-x^2, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ x^2-4, & x<0, \end{cases}$$

函数  $f(x)$  的简图为:



(3)  $xf(x)>0$ , 即  $x$  与  $f(x)$  同号.

当  $x \in (-\infty, -2)$  时,  $f(x)>0$ , 不符;

当  $x \in (-2, 0)$  时,  $f(x)<0$ ,  $x$  与  $f(x)$  都为负, 符合;

当  $x \in (0, 2)$  时,  $f(x)>0$ ,  $x$  与  $f(x)$  都为正, 符合;

当  $x \in (2, +\infty)$  时,  $f(x)<0$ , 不符.

则  $xf(x)>0$  的解集为  $(-2, 0) \cup (0, 2)$ .

### §3 函数的单调性和最值

#### 基础满分

**1. A 【解析】**  $\because$  定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  对任意两个不相等实数  $a, b$ ,

总有  $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} > 0$  成立, 即对任意两个不相等实数  $a, b$ , 若  $a < b$ , 总有  $f(a) < f(b)$  成立,  $\therefore f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上是增函数, 故 A 正确.

**2. C** 【解析】 $y = 2x$  在区间  $(-\infty, 0)$  上为增函数, 不符合题意, 故 A 错误;

$y = -\frac{1}{x}$  在区间  $(-\infty, 0)$  上为增函数, 不符合题意, 故 B 错误;

当  $x < 0$  时,  $y = |x| = -x$  在区间  $(-\infty, 0)$  上为减函数, 符合题意, 故 C 正确;

$y = -x^2$  在区间  $(-\infty, 0)$  上为增函数, 不符合题意, 故 D 错误.

**3. B** 【解析】由  $y = |x|$  得  $y = \begin{cases} x, x > 0, \\ -x, x \leq 0, \end{cases}$  所以函数  $y = |x|$  在区间  $(0, +\infty)$  上单调递增.  $y = 2x - 1$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 故 A 不符合题意;

$y = \frac{1}{x}$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减, 故 B 符合题意;

$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ , 且  $y = \sqrt{x}$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 故 C 不符合题意;

$y = x^2$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 故 D 不符合题意.

**4. 【解】** $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$  在区间  $(1, +\infty)$  上单调递减.

证明: 设任意的  $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$  且  $x_1 < x_2$ ,

$$\begin{aligned} \text{则 } f(x_1) - f(x_2) &= \frac{1}{x_1^2+1} - \frac{1}{x_2^2+1} = \\ &= \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)} = \frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}. \end{aligned}$$

$\therefore 1 < x_1 < x_2$ ,

$\therefore x_2 - x_1 > 0, x_2 + x_1 > 0, (x_1^2+1)(x_2^2+1) > 0$ ,

$\therefore f(x_1) - f(x_2) > 0$ , 即  $f(x_1) >$

$f(x_2)$ ,  $\therefore f(x) = \frac{1}{x^2+1}$  在区间  $(1, +\infty)$  上单调递减.

**5. 【解】**根据题意, 函数  $f(x) = x + \frac{k}{x}$  ( $k > 0$ ) 在区间  $(0, \sqrt{k})$  上单调递减, 在区间  $[\sqrt{k}, +\infty)$  上单调递增, 证明:

①根据题意, 设  $0 < x_1 < x_2 < \sqrt{k}$ ,

$$\begin{aligned} \text{则 } f(x_1) - f(x_2) &= x_1 + \frac{k}{x_1} - x_2 - \frac{k}{x_2} = \\ &= (x_1 - x_2) + \left( \frac{k}{x_1} - \frac{k}{x_2} \right) = (x_1 - x_2) \cdot \\ &\left( 1 - \frac{k}{x_1 x_2} \right) = (x_1 - x_2) \left( \frac{x_1 x_2 - k}{x_1 x_2} \right), \end{aligned}$$

$\therefore 0 < x_1 < x_2 < \sqrt{k}$ ,  $\therefore x_1 - x_2 < 0$ ,  $x_1 x_2 - k < 0, x_1 x_2 > 0$ ,  $\therefore f(x_1) - f(x_2) > 0$ , 即  $f(x_1) > f(x_2)$ ,  $\therefore f(x)$  在  $(0, \sqrt{k})$  内是减函数;

②根据题意, 设  $\sqrt{k} < x_1 < x_2$ ,

$$\begin{aligned} \text{则 } f(x_1) - f(x_2) &= x_1 + \frac{k}{x_1} - x_2 - \frac{k}{x_2} = \\ &= (x_1 - x_2) + \left( \frac{k}{x_1} - \frac{k}{x_2} \right) = (x_1 - x_2) \cdot \\ &\left( 1 - \frac{k}{x_1 x_2} \right) = (x_1 - x_2) \left( \frac{x_1 x_2 - k}{x_1 x_2} \right), \end{aligned}$$

又由  $\sqrt{k} < x_1 < x_2$ ,  $\therefore x_1 - x_2 < 0$ ,  $x_1 x_2 - k > 0, x_1 x_2 > 0$ ,

$\therefore f(x_1) - f(x_2) < 0$ , 即  $f(x_1) < f(x_2)$ ,  $\therefore f(x)$  在  $[\sqrt{k}, +\infty)$  内是增函数.

**6. A** 【解析】函数  $y = \frac{1}{x-1}$  的图象可看作  $y = \frac{1}{x}$  的图象向右平移 1 个单

位得到,  $\therefore y = \frac{1}{x}$  在  $(-\infty, 0)$  和

$(0, +\infty)$  上单调递减,  $\therefore y = \frac{1}{x-1}$  在

$(-\infty, 1)$  和  $(1, +\infty)$  上单调递减. 故 A 正确.

**易错警示** 忽略多个单调区间

的写法

两个及以上单调区间不能用“ $\cup$ ”连接, 只能用逗号或者是“和”字连接, 比如本题, 单调递减区间只能写成“ $(-\infty, 1)$  和  $(1, +\infty)$ ”或者“ $(-\infty, 1), (1, +\infty)$ ”.

**7. C** 【解析】当  $x > 0$  时,  $f(x) = x^2 - 2x + 5$ , 图象的对称轴为  $x = 1$ , 所以函数  $f(x)$  的单调递增区间为  $[1, +\infty)$ ; 当  $x \leq 0$  时,  $f(x) = x^2 + 2x + 5$ , 图象的对称轴为  $x = -1$ , 所以函数  $f(x)$  的单调递增区间为  $[-1, 0]$ . 综上可得, 函数  $f(x) = x^2 - 2|x| + 5$  的单调增区间是  $[-1, 0]$  和  $[1, +\infty)$ , 故 C 正确.

**8. B** 【解析】因为定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(x) = 3f(|x|) + x^2 - 2x$ , 所以  $f(|x|) = 3f(|x|) + |x|^2 - 2|x|$ , 所以  $f(|x|) = -\frac{1}{2}x^2 + |x|$ ,

$$f(x) = 3\left(-\frac{1}{2}x^2 + |x|\right) + x^2 - 2x = -\frac{1}{2}x^2 + 3|x| - 2x = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + x, & x \geq 0, \\ -\frac{1}{2}x^2 - 5x, & x < 0. \end{cases}$$

当  $x \geq 0$  时,  $f(x)$  的单调递增区间为  $[0, 1]$ ;

当  $x < 0$  时,  $f(x)$  的单调递增区间为  $(-\infty, -5]$ . 故 B 正确.

**9.  $[-5, -3], [1, 4]$**  【解析】通过题中图象可知, 函数图象在区间  $[-5, -3]$  和  $[1, 4]$  上是上升趋势, 所以函数的单调递增区间是  $[-5, -3], [1, 4]$ .

**10.  $[2, +\infty)$**  【解析】解  $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ , 得  $x \leq 1$  或  $x \geq 2$ . 根据复合函数求单调性的方法“同增异减”, 取二次函数单调增区间, 得  $x > \frac{3}{2}$ .

因为  $x \geq 2$ , 所以  $f(x)$  的单调递增区间为  $[2, +\infty)$ .

**易错警示** 忽略函数的定义域

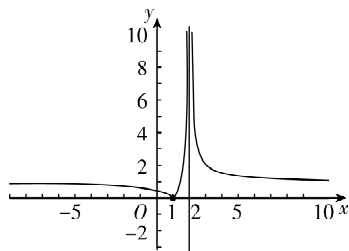
研究函数的单调性,一定要先求函数的定义域,再在定义域内研究.

11.  $[0,1), (1,9]$  【解析】 $y = \frac{2}{1-\frac{1}{x}}$ ,  
 $x \in (0,1) \cup (1,9]$ , 由于  $y = \frac{1}{x}$   
 在  $[0,1), (1,9]$  上单调递减, 则  
 $y = 1 - \frac{1}{x}$  在  $[0,1), (1,9]$  上单调递  
 增, 因此  $y = \frac{2}{1-\frac{1}{x}}$  在  $(0,1) \cup (1,9]$  上单调递减, 所以  $f(x) = \frac{2x}{x-1}$   
 在  $[0,1), (1,9]$  上单调递减.

12.  $(-\infty, 1), (2, +\infty)$

【解析】 $f(x) = \frac{|x-1|}{|x-2|} = \left| \frac{x-1}{x-2} \right| = \left| 1 + \frac{1}{x-2} \right|$ ,

由函数图象的变换作出函数  $f(x)$  的图象如图所示:



由图象可得函数  $f(x)$  的单调递减区间是  $(-\infty, 1), (2, +\infty)$ .

13. C 【解析】根据题意,  $a^2 - a + 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ ,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上是减函数, 则  $f(a^2 - a + 1) \leq f\left(\frac{3}{4}\right)$ , 故 C 正确.

14. A 【解析】 $\because f(x) = \sqrt{1-(x-1)^2} = \sqrt{2x-x^2}$ ,  
 $\therefore F(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x} = \sqrt{\frac{2}{x}-1}$  是减函数,  $\therefore 0 < x_1 < x_2 <$

$$1, \therefore \frac{f(x_1)}{x_1} > \frac{f(x_2)}{x_2}. \text{ 故 A 正确.}$$

15.  $b > a > c$  【解析】 $\because$  当  $x_2 > x_1 > 1$  时,  $[f(x_2) - f(x_1)](x_2 - x_1) < 0$  恒成立,  $\therefore f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递减. 又  $\because$  函数  $f(x)$  的图象关于直线  $x=1$  对称,  $\therefore a = f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right)$ , 又  $\because b = f(2), c = f(\pi)$ , 且  $2 < \frac{5}{2} < \pi$ ,  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递减,  $\therefore f(2) > f\left(\frac{5}{2}\right) > f(\pi)$ ,  $\therefore b > a > c$ .

**方法总结** 比较函数值的大小,

应将自变量转化到同一个单调区间内, 然后利用函数的单调性解决.

16. (1) 【证明】函数  $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+2}$ . 设  $x_2 > x_1 > 1$ , 则  $f(x_2) - f(x_1) = \sqrt{x_2-1} + \sqrt{x_2+2} - \sqrt{x_1-1} - \sqrt{x_1+2} = \sqrt{x_2-1} - \sqrt{x_1-1} + \sqrt{x_2+2} - \sqrt{x_1+2}$ , 因为  $x_2 > x_1 > 1$ , 所以  $x_2-1 > x_1-1 > 0, x_2+2 > x_1+2 > 3$ , 所以  $\sqrt{x_2-1} > \sqrt{x_1-1}, \sqrt{x_2+2} > \sqrt{x_1+2}$ , 即  $\sqrt{x_2-1} - \sqrt{x_1-1} > 0, \sqrt{x_2+2} - \sqrt{x_1+2} > 0$ , 则  $f(x_2) - f(x_1) > 0, f(x_2) > f(x_1)$ . 故  $f(x)$  是  $(1, +\infty)$  上的增函数.

- (2) 【解】 $a > 1$ , 则  $a + \frac{4}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{4}{a}} = 4$ , 当且仅当  $a = \frac{4}{a}$ , 即  $a = 2$  时等号成立,  $4a + \frac{1}{a} - \left(a + \frac{4}{a}\right) = 3a - \frac{3}{a} = \frac{3(a^2-1)}{a}$ , 由  $a > 1$ , 有  $a^2 - 1 > 0$ , 则  $4a + \frac{1}{a} - \left(a + \frac{4}{a}\right) > 0, 4a + \frac{1}{a} > a + \frac{4}{a} \geq 4$ , 函数  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增,

$$\text{所以 } f\left(a + \frac{4}{a}\right) < f\left(4a + \frac{1}{a}\right).$$

17. C 【解析】因为函数  $y=f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 且  $f(2m-3) > f(-m)$ , 所以  $2m-3 > -m$ , 解得  $m > 1$ , 故 C 正确.

18. C 【解析】 $\because$  函数  $y=f(x)$  是定义在  $[-4, 4]$  上的减函数, 且  $f(a+1) > f(2a)$ ,  $\therefore -4 \leq a+1 < 2a \leq 4$ , 解得  $1 < a \leq 2$ , 故 C 正确.

**易错警示** 忽略抽象函数的定义域

定义域

求解此类问题时, 千万不要忘记抽象函数的定义域,  $f$  不变则 “( )” 内的范围不变.

19. 思路导引 本题第(2)问属于求解抽象不等式的题型, 可借助第(1)问得到的单调性将函数值之间的不等关系转化为自变量之间的不等关系, 进而解不等式求解; 求解过程中要注意函数的定义域, 即 “ $3m$ ” 与 “ $5-2m$ ” 都要属于  $(1, +\infty)$ .

【解】(1)  $x \in (1, +\infty)$  时,  $f(x)$  单调递增, 证明如下:

$$\text{设 } 1 < x_1 < x_2, f(x) = x + \frac{1}{x}, \text{ 则}$$

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1 + \frac{1}{x_1} - x_2 - \frac{1}{x_2} =$$

$$(x_1 - x_2) + \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} = (x_1 - x_2) \cdot$$

$$\left(1 - \frac{1}{x_1 x_2}\right) < 0, \text{ 所以 } f(x_1) < f(x_2),$$

所以  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增.

(2) 由  $f(3m) > f(5-2m)$  可得  $3m > 5-2m > 1$ , 解得  $1 < m < 2$ . 故  $m$  的取值范围为  $(1, 2)$ .

20. 【解】(1) 令  $x=y=1$ , 得  $f(1) = f\left(\frac{1}{1}\right) = f(1) - f(1)$ , 所以  $f(1) = 0$ .

(2)  $f(x)$  是  $(0, +\infty)$  上的增函数. 证明: 任取  $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ , 且

$x_1 < x_2$ , 则  $f(x_2) - f(x_1) = f\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ ,

因为  $\frac{x_2}{x_1} > 1$ , 所以  $f\left(\frac{x_2}{x_1}\right) > 0$ , 即  $f(x_2) > f(x_1)$ , 所以  $f(x)$  是  $(0, +\infty)$  上的增函数.

(3) 由  $f\left(\frac{4}{2}\right) = f(4) - f(2)$  及  $f(4) = 6$ , 可得  $f(2) = 3$ , 结合 (2) 知不等式  $f(x-1) \leq 3$  等价于  $f(x-1) \leq f(2)$ , 可得  $\begin{cases} x-1 > 0, \\ x-1 \leq 2, \end{cases}$  解得  $1 < x \leq 3$ . 所以原不等式的解集为  $(1, 3]$ .

**21. C** 【解析】函数  $f(x) = x + \sqrt{2x-3}$  的定义域为  $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ , 由  $y=x$  和  $y=\sqrt{2x-3}$  在  $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$  均为增函数, 可得  $f(x) = x + \sqrt{2x-3}$  在  $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$  为增函数, 则  $f(x)$  有最小值  $\frac{3}{2}$ , 无最大值, 故 C 正确.

**易错警示** 求函数最值时, 忽略函数的定义域

求函数最值时要注意先确定函数的定义域, 再讨论函数的单调性求得最值.

**22. D** 【解析】令  $t = \sqrt{1-x} \geq 0$ , 则  $x = 1-t^2$ ,  $y = -t^2 + t + 1$ ,  $t \geq 0$ . 当  $t = \frac{1}{2}$  时, 即  $x = \frac{3}{4}$  时,  $f(x)$  有最大值  $\frac{5}{4}$ , 无最小值, 故 D 正确.

**23. C** 【解析】函数  $f(x) = |x-2| - |x+1|$

$$= \begin{cases} -3, & x \geq 2, \\ 1-2x, & -1 < x < 2, \\ 3, & x \leq -1. \end{cases}$$

当  $x < -1$  时,  $-3 < 1-2x < 3$ , 故  $f(x) \in (-3, 3)$ . 综上,  $f(x) \in [-3, 3]$ . 所以  $f(x)$  的最小值为  $-3$ , 最大值为  $3$ , 故 C 正确.

**24. B** 【解析】因为  $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ , 所以  $0 < \frac{1}{x^2+x+1} \leq \frac{4}{3}$ , 所以函数  $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$  的最大值为  $\frac{4}{3}$ , 故 B 正确.

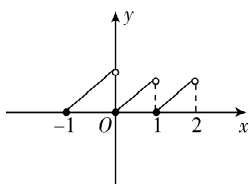
**25. D** 【解析】由  $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 5x + \frac{4}{x}$ , 用  $\frac{1}{x}$  代替  $x$ , 则  $f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{5}{x} + 4x$ , 联立解得  $f(x) = x + \frac{2}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ . 易知  $f(x) = x + \frac{2}{x}$  在  $(0, \sqrt{2})$  上单调递减, 在  $(\sqrt{2}, +\infty)$  上单调递增, 则  $f(x)$  的最小值为  $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2} + \frac{2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ . 故 D 正确.

**26. A** 【解析】令  $2 + \sqrt{x} = t (t \geq 2)$ , 则  $x = (t-2)^2$ ,  $g(t) = (t-2)^2 + 4 \cdot (t-2) - 6 = t^2 - 10$ , 即  $g(x) = x^2 - 10$ ,  $x \geq 2$ , 为递增函数, 即当  $x = 2$  时,  $g(x)$  取得最小值  $-6$ , 故 A 正确.

**27. C** 【解析】因为  $f(x) = x -$

$$[x] = \begin{cases} \dots\dots \\ x+1, & -1 \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 1, \\ x-1, & 1 \leq x < 2, \\ x-2, & 2 \leq x < 3, \\ \dots\dots \end{cases}$$

其函数图象如图所示:



结合图象可知, A 显然错误; 函数没有最大值, 最小值为  $0$ , 故 B 错误;

因为  $2 < \sqrt{6} < 3 < \sqrt{13} < 4$ , 所以  $f(\sqrt{6}) = \sqrt{6} - 2$ ,  $f(\sqrt{13}) = \sqrt{13} - 3$ , 故  $f(\sqrt{6}) + f(\sqrt{13}) - 1 = \sqrt{6} + \sqrt{13} - 6$ , 又  $(\sqrt{6} + \sqrt{13})^2 - 6^2 = 2\sqrt{78} - 17 > 0$ , 故  $\sqrt{6} + \sqrt{13} - 6 > 0$ , 即  $\sqrt{6} + \sqrt{13} - 5 > 1$ , 所以  $f(\sqrt{6}) + f(\sqrt{13}) > 1$ , 故 C 正确;

结合图象可知,  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上显然不单调, 故 D 错误.

**28. BCD** 【解析】取  $x^2 = 6 - x$ , 解得  $x = -3$  或  $x = 2$ .

当  $x \leq -3$  时,  $x^2 \geq 6 - x$ , 且  $x^2 > \frac{1}{4}x$ ,  $h(x) = x^2$ ,  $h(x) \geq 9$ ;

当  $-3 < x < 2$  时,  $x^2 < 6 - x$ ,  $6 - x > \frac{1}{4}x$ ,  $h(x) = 6 - x$ ,  $h(x) \in (4, 9)$ ;

当  $x \geq 2$  时,  $x^2 \geq 6 - x$ ,  $x^2 > \frac{1}{4}x$ ,  $h(x) = x^2$ ,  $h(x) \in [4, +\infty)$ .

综上所述,  $h(x) \in [4, +\infty)$ , 故 BCD 正确.

### 7.4 重难点上分

**1. C** 【解析】当  $2k-1=0$ , 即  $k=\frac{1}{2}$  时,  $y=b$  为常函数, 不具有单调性, 不符合题意; 当  $2k-1 \neq 0$  时,  $\because y = (2k-1) \cdot x + b$  是  $\mathbf{R}$  上的减函数,  $\therefore 2k-1 < 0$ ,  $\therefore k < \frac{1}{2}$ , 故 C 正确.

**2. B** 【解析】函数  $f(x) = x^2 - 2(a-1)x + 2$  的图象是开口朝上, 且以直线  $x=a-1$  为对称轴的抛物线, 若  $f(x) = x^2 - 2(a-1)x + 2$  在  $(-\infty, 5]$  上是减函数, 则  $a-1 \geq 5$ , 解得  $a \geq 6$ , 故 B 正确.

**3. C** 【解析】 $f(x) = |3x+a|$  的图象是由  $y=|3x|$  的图象向左或向右平移  $\left|\frac{a}{3}\right|$  个单位得到, 而  $y=|3x|$  的单调递减区间为  $(-\infty, 0]$ , 所以



$f(x) = |3x+a|$  的单调递减区间为  $(-\infty, -\frac{a}{3}]$ , 所以  $-\frac{a}{3} = 3$ , 所以  $a = -9$ , 故 C 正确.

**4. A** 【解析】设  $t = 1 - ax$ , 由  $y = \sqrt{t}$  为增函数,  $f(x) = \sqrt{1-ax}$  在  $(-\infty, 1]$  上单调递减, 则  $t = 1 - ax$  为  $(-\infty, 1]$  上的减函数, 且在区间  $(-\infty, 1]$  上,  $t \geq 0$  恒成立, 所以  $\begin{cases} a > 0, \\ 1 - a \geq 0, \end{cases}$  解得  $0 < a \leq 1$ , 故 A 正确.

**5. C** 【解析】根据题意, 函数  $f(x) = \frac{ax-1}{x-a} = \frac{a(x-a)+a^2-1}{x-a} = \frac{a^2-1}{x-a} + a$ , 若  $f(x)$  在区间  $(2, +\infty)$  上单调递减, 必有  $\begin{cases} a^2-1 > 0, \\ a \leq 2, \end{cases}$  解得  $a < -1$  或  $1 < a \leq 2$ , 即  $a$  的取值范围为  $(-\infty, -1) \cup (1, 2]$ , 故 C 正确.

**6. A** 【解析】由题意, 函数  $f(x) = -x^2 + 4ax$  为图象开口向下, 对称轴为  $x = 2a$  的二次函数, 故  $f(x)$  在  $[2a, +\infty)$  上单调递减. 又  $f(x)$  在区间  $[1, 2]$  上单调递减, 则  $2a \leq 1 \Rightarrow a \leq \frac{1}{2}$ .

函数  $g(x) = \frac{2x-a+1}{x-2a} = \frac{2(x-2a)+3a+1}{x-2a} = 2 + \frac{3a+1}{x-2a}$ , 且  $g(x)$  在区间  $[1, 2]$  上是减函数, 故  $3a+1 > 0$ , 且  $2a < 1$  或  $2a > 2$ , 即  $-\frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}$  或  $a > 1$ . 综上,  $a$  的取值范围是  $\left\{a \mid -\frac{1}{3} < a < \frac{1}{2}\right\}$ , 故 A 正确.

**7. A** 【解析】根据题意, 函数  $f(x) = x^2 - kx - 8$  为二次函数, 其图象开口向上, 对称轴为  $x = \frac{k}{2}$ . 若函数  $f(x) = x^2 - kx - 8$  在区间  $[5, 20]$  上具有单调性, 则  $\frac{k}{2} \leq 5$  或

$\frac{k}{2} \geq 20$ , 解得  $k \leq 10$  或  $k \geq 40$ , 所以实数  $k$  的取值范围是  $(-\infty, 10] \cup [40, +\infty)$ , 故 A 正确.

#### 易错警示 忽略单调性包含两种情况

种情况

看清题目条件是“具有单调性”, 所以有两种情况, 一种是单调递增, 一种是单调递减.

**8. D** 【解析】因为函数  $f(x) = \begin{cases} (2a-1)x+1, & x < 2, \\ x+\frac{4}{x}, & x \geq 2 \end{cases}$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 所以  $\begin{cases} 2a-1 > 0, \\ 4a-2+1 \leq 4, \end{cases}$  解得  $\frac{1}{2} < a \leq \frac{5}{4}$ , 故 D 正确.

#### 易错警示 忽略分段函数分段

处的单调性致错

$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x < a, \\ f_2(x), & x \geq a, \end{cases}$  单调, 则每段都单调 [即  $f_1(x)$  在  $(-\infty, a)$  上单调,  $f_2(x)$  在  $(a, +\infty)$  上单调], 最重要的是注意分段处一定也要保证单调.

**9. C** 【解析】由题意可得, 函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 则  $\begin{cases} -\frac{a}{2} \geq 1, \\ a < 0, \\ -1-a-9 \leq a, \end{cases}$  解得  $-5 \leq a \leq -2$ , 故 C 正确.

**10. D** 【解析】 $\because$  函数  $f(x)$  是  $(-\infty, +\infty)$  上的减函数,  $\therefore \begin{cases} \frac{a}{2} \geq 0, \\ 2a \leq 1, \end{cases}$  解得  $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ , 故 D 正确.

**11. A** 【解析】因为  $f(x) = \begin{cases} (a+3)x-3, & x < 1, \\ 1-\frac{a}{x+1}, & x \geq 1 \end{cases}$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增,

所以  $\begin{cases} a+3 > 0, \\ a > 0, \\ a+3-3 \leq 1-\frac{1}{2}a, \end{cases}$  解得  $0 < a \leq \frac{2}{3}$ , 故 A 正确.

**12. B** 【解析】 $f(x) = \begin{cases} 3x^2-2ax+a^2, & x \geq a, \\ x^2+2ax-a^2, & x < a. \end{cases}$  (1) 若  $a = 0$ , 当  $x < 0$  时,  $f(x) = x^2$  在  $[-3, 0]$  上单调递增, 不符合题意; (2) 若  $a > 0$ ,  $f(x)$  在  $(-\infty, -a)$  上单调递减, 在  $(-a, +\infty)$  上单调递增, 若  $f(x)$  在  $[-3, 0]$  上不是单调函数, 则  $-3 < -a < 0$ , 即  $0 < a < 3$ ; (3) 若  $a < 0$ , 则  $f(x)$  在  $(-\infty, \frac{a}{3})$  上单调递减, 在  $(\frac{a}{3}, +\infty)$  上单调递增, 若  $f(x)$  在  $[-3, 0]$  上不是单调函数, 则  $-3 < \frac{a}{3} < 0$ , 即  $-9 < a < 0$ . 综上,  $a$  的取值范围是  $(-9, 0) \cup (0, 3)$ , 故 B 正确.

**13. [1, 2]** 【解析】 $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内是增函数,  $\therefore$  根据增函数的定义及一次函数、二次函数的单调性可得  $a$  满足  $\begin{cases} \frac{2-a}{2} \geq 0, \\ a-1 \geq 0, \\ 2a-1 > 0, \end{cases}$  解得  $1 \leq a \leq 2$ ,  $\therefore a$  的取值范围为  $[1, 2]$ .

**14. 【解】**(1) 当  $a = -1$  时,  $f(x) = |x^2 - x| = \begin{cases} x^2 - x, & x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty), \\ x - x^2, & x \in [0, 1], \end{cases}$  所以当  $x \in [0, 1]$  时,  $f(x) = x - x^2$ . 抛物线开口向下, 对称轴为  $x = \frac{1}{2}$ , 所以  $f(x)$  在  $[0, \frac{1}{2})$  上单调递增, 在  $[\frac{1}{2}, 1]$  上单调递减, 即函

数  $f(x)$  在  $x \in [0, 1]$  上的单调递增区间为  $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ , 单调递减区间为  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ .

(2)  $x \in [0, 1]$ , 若  $a \geq 0$ ,  $f(x) = x^2 + ax$ , 图象的对称轴为  $x = -\frac{a}{2} \leq 0$ , 则  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上单调递增, 则  $M(a) = 1 + a$ .

若  $a < 0$ , 则  $f(x)$  在  $\left[0, -\frac{a}{2}\right]$  上单调递增, 在  $\left(-\frac{a}{2}, -a\right)$  上单调递减, 在  $(-a, +\infty)$  上单调递增.

若  $1 \leq -\frac{a}{2}$ , 即  $a \leq -2$  时,  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上单调递增, 可得  $M(a) = -a - 1$ .

当  $x = -\frac{a}{2}$  时  $f(x) = \frac{a^2}{4}$ .

当  $x > -a$  时, 由  $x^2 + ax = \frac{a^2}{4}$ , 解得  $x = -\frac{1+\sqrt{2}}{2}a$ .

若  $-\frac{a}{2} < 1 \leq -\frac{1+\sqrt{2}}{2}a$ , 即  $-2 < a \leq 2 - 2\sqrt{2}$ , 可得  $f(x)$  的最大值为  $M(a) = \frac{a^2}{4}$ .

若  $1 > -\frac{1+\sqrt{2}}{2}a$  且  $a < 0$ , 即  $2 - 2\sqrt{2} < a < 0$ , 可得  $f(x)$  的最大值为  $M(a) = 1 + a$ ,

则  $M(a) = \begin{cases} 1+a, & a > 2-2\sqrt{2}, \\ -a-1, & a \leq -2, \\ \frac{a^2}{4}, & -2 < a \leq 2-2\sqrt{2}. \end{cases}$

当  $a > 2 - 2\sqrt{2}$  时,  $M(a) > 3 - 2\sqrt{2}$ ;

当  $a \leq -2$  时,  $M(a) \geq 1$ ;

当  $-2 < a \leq 2 - 2\sqrt{2}$  时,  $M(a) \geq \frac{1}{4} \cdot (2 - 2\sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{2}$ .

综上,  $M(a)$  的最小值为  $3 - 2\sqrt{2}$ .

**15. C** 【解析】 $f(x) = -x^2 - 2x + 3$  的图象的对称轴为  $x = -1$ .

当  $-1 \leq a < 2$  时, 函数  $f(x)$  在  $[a, 2]$  上单调递减, 最大值为  $f(a) = \frac{15}{4}$ , 解得  $a = -\frac{1}{2}$ ;

当  $a < -1$  时, 函数  $f(x)$  的最大值为  $f(-1) = 4$ , 不满足条件, 故 C 正确.

**16. AB** 【解析】由题意知  $a \neq 0$ , 当  $a > 0$  时,  $y = ax + 1$  在  $[1, 2]$  上为增函数, 有  $(2a + 1) - (a + 1) = 2$ , 解得  $a = 2$ ;

当  $a < 0$  时,  $y = ax + 1$  在  $[1, 2]$  上为减函数, 有  $(a + 1) - (2a + 1) = 2$ , 解得  $a = -2$ . 综上知  $a = \pm 2$ , 故 AB 正确.

**17. D** 【解析】当  $x < 1$  时,  $f(x) = x + 1 < 2$ , 又函数  $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 1, \\ \frac{a}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$  存

在最大值, 所以函数在  $x \geq 1$  时取到最大值. 又  $x \geq 1$  时,  $f(x) = \frac{a}{x}$ ,

当  $a = 0$  时, 显然不合题意; 当  $a \neq 0$  时,  $f(x) = \frac{a}{x}$  为反比例函数, 所以

以  $\begin{cases} a > 0, \\ f(1) = a \geq 2, \end{cases}$  故  $a \geq 2$ , 故 D 正确.

**18. 3** 【解析】 $f(x) = \frac{2x+m}{x+1} =$

$\frac{2(x+1)+m-2}{x+1} = 2 + \frac{m-2}{x+1}$ , 显

然  $m \neq 2$ , 当  $m > 2$  时, 函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上单调递减, 则  $2 + \frac{m-2}{0+1} = 3$ , 解得  $m = 3$ ;

当  $m < 2$  时, 函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上单调递增, 则  $2 + \frac{m-2}{1+1} = 3$ , 解得  $m = 4$  (舍).

综上,  $m = 3$ .

**19. 【解】**(1) 由  $f(x) = ax^2 - 2x$ , 得  $y =$

$|f(x)| = |ax^2 - 2x| = \begin{cases} ax^2 - 2x, & x < 0 \text{ 或 } x > \frac{2}{a}, \\ -ax^2 + 2x, & 0 \leq x \leq \frac{2}{a}, \end{cases}$  根据二次

函数的图象与性质, 可知  $y = |f(x)|$  在区间  $(-\infty, 0)$  和  $\left(\frac{1}{a}, \frac{2}{a}\right)$  上为减函数, 在区间

$\left(0, \frac{1}{a}\right)$  和  $\left(\frac{2}{a}, +\infty\right)$  上为增函数, 因此, 若  $y = |f(x)|$  在  $[2, 3]$  上单调递减, 则  $\frac{1}{a} \leq 2$  且  $\frac{2}{a} \geq 3$ , 解得

$\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{2}{3}$ , 即  $a$  的取值范围是  $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$ .

(2) 若函数  $y = f(x)$  在  $[t, t+2]$  上的最小值为  $\frac{t}{3}$ , 最大值为  $\frac{3}{a}$ , 当

$t+2 \leq \frac{1}{a}$  时, 函数  $f(x) = ax^2 - 2x$  在  $[t, t+2]$  上单调递减, 则

$f(x)_{\max} = f(t) = at^2 - 2t = \frac{3}{a} \Rightarrow (at+1)(at+3) = 0$  ①,  $f(x)_{\min} = f(t+2) = a(t+2)^2 - 2(t+2) = \frac{t}{3}$ , 且

$at+2a \leq 1, a > 0$ , 即 ① 为  $at = -1$ , 则

$\begin{cases} at = -1, \\ a(t+2)^2 - 2(t+2) = \frac{t}{3}, \\ at+2a \leq 1, \end{cases}$

解得  $\begin{cases} a = \frac{6-\sqrt{6}}{6}, \\ t = \frac{-6-\sqrt{6}}{5}. \end{cases}$

当  $t+1 \leq \frac{1}{a} < t+2$  时, 函数  $f(x) =$

$ax^2 - 2x$  在  $\left[t, \frac{1}{a}\right]$  上单调递减, 在

$\left[\frac{1}{a}, t+2\right]$  上单调递增,  $f(x)_{\max} =$

$f(t) = at^2 - 2t = \frac{3}{a}, f(x)_{\min} =$

$f\left(\frac{1}{a}\right) = a\left(\frac{1}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{a} = \frac{t}{3}$ , 且  $at + a \leq 1 < at + 2a$ , 则

$$\begin{cases} at = -1, \\ at = -3, \end{cases} \text{无解};$$

当  $t < \frac{1}{a} < t+1$ , 函数  $f(x) = ax^2 - 2x$  在  $\left[t, \frac{1}{a}\right]$  上单调递减, 在  $\left[\frac{1}{a}, t+2\right]$  上单调递增,  $f(x)_{\max} = f(t+2) = a(t+2)^2 - 2(t+2) = \frac{3}{a}$ ,  $f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{a}\right) = a \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{a} = \frac{t}{3}$ , 且  $at < 1 < at + a$ , 则

$$\begin{cases} a(t+2) = 3, \\ at = -3, \end{cases} \text{无解};$$

当  $\frac{1}{a} \leq t$  时, 函数  $f(x) = ax^2 - 2x$  在  $[t, t+2]$  上单调递增, 则  $f(x)_{\min} = f(t) = at^2 - 2t = \frac{t}{3}$ ,  $f(x)_{\max} = f(t+2) = a(t+2)^2 - 2(t+2) = \frac{3}{a}$ , 且  $at \geq 1$ , 则

$$\begin{cases} a(t+2) = 3, \\ at = \frac{7}{3}, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a = \frac{1}{3}, \\ t = 7. \end{cases}$$

综上, 当  $t+2 \leq \frac{1}{a}$  时,  $a = \frac{6-\sqrt{6}}{6}$ ,  $t = \frac{-6-\sqrt{6}}{5}$ ; 当  $\frac{1}{a} \leq t$  时,  $a = \frac{1}{3}$ ,  $t = 7$ .

### 33 考点训练

1. A 【解析】依次分析选项:

$f(x) = 2x - 1$  是一次函数, 在其定义域内为增函数, 故 A 正确;

$f(x) = x^2$  是二次函数, 在  $(-\infty, 0)$  上为减函数, 故 B 错误;

$f(x) = \frac{-1}{x}$  是反比例函数, 在其定义域内不具有单调性, 故 C 错误;

$f(x) = |x|$  在  $(-\infty, 0)$  上为减函数, 故 D 错误.

2. A 【解析】由题意知,  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 所以  $f(-2) < f(1) < f(3)$ , 故 A 正确.

3. C 【解析】设  $t = -x^2 + 3x + 4$ ,  $t \neq 0$ , 则有  $x \neq -1$  且  $x \neq 4$ ,  $t \in (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{25}{4}\right]$ , 所以函数  $y = \frac{1}{4+3x-x^2}$  的定义域为  $\{x | x \neq -1 \text{ 且 } x \neq 4\}$ , 由二次函数的性质可知  $t$  的单调递增区间为  $(-\infty, -1)$ ,  $\left(-1, \frac{3}{2}\right]$ ; 单调递减区间为  $\left[\frac{3}{2}, 4\right)$ ,  $(4, +\infty)$ . 又因为  $y = \frac{1}{t}$  在  $t \in (-\infty, 0)$  和  $\left(0, \frac{25}{4}\right]$  上单调递减, 由复合函数的单调性可知, 函数  $y = \frac{1}{4+3x-x^2}$  的单调递增区间为  $\left[\frac{3}{2}, 4\right)$  和  $(4, +\infty)$ , 故 C 正确.

4. B 【解析】 $f(x) = \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2(x+1)-3}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1}$ , 则  $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$  的图象是由函数  $y = -\frac{3}{x}$  的图象向左平移 1 个单位, 再向上平移 2 个单位得到, 所以  $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$  在  $[3, 5]$  上单调递增, 所以当  $x = 5$  时, 函数  $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ ,  $x \in [3, 5]$  有最大值为  $\frac{3}{2}$ , 故 B 正确.

5. C 【解析】因为对于任意  $-3 \leq x_1 < x_2 \leq -1$ , 都有  $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 2$ , 所以  $f(x_1) - f(x_2) > 2(x_1 - x_2)$ , 即  $f(x_1) - 2x_1 > f(x_2) - 2x_2$ . 故  $f(x) - 2x = ax^2 - 2x - 1$  在  $[-3, -1]$  上单调递减. 当  $a = 0$  时,  $f(x) = -2x - 1$  符合

题意;

当  $a > 0$  时, 由  $\frac{1}{a} \geq -1$ , 解得  $a \geq -1$ , 即  $a > 0$ ;

当  $a < 0$  时, 由  $\frac{1}{a} \leq -3$ , 解得  $-\frac{1}{3} \leq a < 0$ . 综上,  $a \geq -\frac{1}{3}$ , 故 C 正确.

6. 1 【解析】令  $-x^2 + 2 \geq x$ , 解得  $-2 \leq x \leq 1$ , 令  $-x^2 + 2 < x$ , 解得  $x < -2$  或  $x > 1$ , 所以  $f(x) = \begin{cases} x, & -2 \leq x \leq 1, \\ -x^2 + 2, & x < -2 \text{ 或 } x > 1, \end{cases}$  当  $-2 \leq x \leq 1$  时,  $f(x) = x$ ,  $f(x)_{\max} = 1$ , 当  $x < -2$  或  $x > 1$  时,  $f(x) = -x^2 + 2$ ,  $f(x) < 1$ . 所以函数  $f(x)$  的最大值为 1.

7. [1, 6] 【解析】函数  $f(x) = \begin{cases} |x-2a|, & x \leq 2, \\ x + \frac{1}{x-2} + a, & x > 2, \end{cases}$  因为  $f(2)$  是  $f(x)$  的最小值, 故当  $x \leq 2$  时, 函数  $f(x) = |x-2a|$  应为单调递减函数, 所以  $2a \geq 2$ , 解得  $a \geq 1$ .

当  $x > 2$  时, 函数  $f(x) = x + \frac{1}{x-2} + a = (x-2) + \frac{1}{x-2} + a + 2$ . 令  $t = x-2 > 0$ , 设函数  $g(t) = t + \frac{1}{t}$  ( $t > 0$ ), 则  $g(t)$  为对勾函数, 由对勾函数的性质可得当  $t \in (0, 1)$  时,  $g(t)$  单调递减, 当  $t \in (1, +\infty)$  时,  $g(t)$  单调递增, 所以当  $t = 1$  时,  $g(t)$  取得最小值 2, 即  $x = 3$  时,  $f(x)$  取得最小值  $a+4$ . 所以  $4+a \geq f(2)$ , 即  $4+a \geq |2-2a|$ , 解得  $-\frac{2}{3} \leq a \leq 6$ .

综上所述,  $a$  的取值范围为  $[1, 6]$ .

8. 【解】(1) 因为  $f(2x+1) = 4x^2 + 2x + 2$ , 令  $2x+1 = t$ , 则  $x = \frac{t-1}{2}$ ,  $f(t) = 4\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{t-1}{2}\right) + 2 = t^2 - t + 2$ , 所

以  $f(x) = x^2 - x + 2$ .

(2)  $g(x) = \frac{f(x)}{x} = x + \frac{2}{x} - 1$ ,  $g(x)$  在  $(\sqrt{2}, +\infty)$  上单调递增, 证明如下:  
任取  $x_1, x_2 \in (\sqrt{2}, +\infty)$  且  $x_1 < x_2$ ,  
 $g(x_1) - g(x_2) = x_1 + \frac{2}{x_1} - 1 - (x_2 + \frac{2}{x_2} - 1) = x_1 - x_2 + \frac{2}{x_1} - \frac{2}{x_2} = \frac{(x_1 - x_2)x_1x_2}{x_1x_2} + \frac{2(x_2 - x_1)}{x_1x_2} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1x_2 - 2)}{x_1x_2}$ ,

其中  $x_1 - x_2 < 0$ ,  $x_1x_2 - 2 > 0$ ,  $x_1x_2 > 0$ , 所以  $g(x_1) - g(x_2) < 0$ ,  $g(x_1) < g(x_2)$ , 所以  $g(x)$  在  $(\sqrt{2}, +\infty)$  上单调递增.

9. 【解】(1)  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减, 证明如下:

令  $x = y = 1$ , 由已知可得,  $f(1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$ , 则  $f(1) = 0$ .

由已知可得,  $f(xy) - f(x) = f(y)$ .

$\forall x_1, x_2 > 0$ , 且  $x_1 < x_2$ , 则  $0 < \frac{x_1}{x_2} < 1$ ,

$f(x_1) - f(x_2) = f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) > 0$ , 即

$f(x_1) > f(x_2)$ , 所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减.

(2) 令  $x = y = 2$ , 由已知可得  $f(4) = 2f(2) = 4$ . 又  $f\left(\frac{8}{x}\right) - f(x-1) =$

$f\left(\frac{8}{x(x-1)}\right)$ , 不等式化为  $f\left(\frac{8}{x}\right) -$

$f(x-1) = f\left(\frac{8}{x(x-1)}\right) < 4 = f(4)$ .

由(1)知,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减, 所以  $\frac{8}{x(x-1)} > 4$ . 又  $\frac{8}{x} > 0$ ,  $x - 1 > 0$ , 所以  $x > 1$ , 所以有  $x(x-1) < 2$ , 整理可得  $x^2 - x - 2 < 0$ , 解得  $-1 < x < 2$ , 所以  $1 < x < 2$ .

故不等式的解集为  $(1, 2)$ .

10. 【解】(1)  $f(x) < ax \Leftrightarrow ax^2 - (a-1)x - 2 < ax \Leftrightarrow ax^2 - (2a-1)x - 2 < 0$ .

当  $a = 0$  时, 原不等式等价于  $x - 2 < 0$ , 解得  $x < 2$ ;

当  $a \neq 0$  时, 因为  $\Delta = (2a-1)^2 + 8a = 4a^2 + 4a + 1 = (2a+1)^2$ ,  $a > -\frac{1}{2}$ , 所以  $\Delta = (2a+1)^2 > 0$ ,  $2a+1 >$

$0$ , 令  $ax^2 - (2a-1)x - 2 = 0 \Leftrightarrow (ax+1)(x-2) = 0$  ( $a \neq 0$ ), 解得  $x_1 = -\frac{1}{a}$ ,  $x_2 = 2$ ,

当  $-\frac{1}{2} < a < 0$  时,  $-\frac{1}{a} > 2$ , 所以不等式  $ax^2 - (2a-1)x - 2 < 0$  的解集为  $(-\infty, 2) \cup \left(-\frac{1}{a}, +\infty\right)$ ;

当  $a > 0$  时,  $-\frac{1}{a} < 0 < 2$ , 所以不等式  $ax^2 - (2a-1)x - 2 < 0$  的解集为  $\left(-\frac{1}{a}, 2\right)$ .

综上所述, 当  $a = 0$  时,  $f(x) < ax$  的解集为  $(-\infty, 2)$ ;

当  $-\frac{1}{2} < a < 0$  时,  $f(x) < ax$  的解集为  $(-\infty, 2) \cup \left(-\frac{1}{a}, +\infty\right)$ ;

当  $a > 0$  时,  $f(x) < ax$  的解集为  $\left(-\frac{1}{a}, 2\right)$ .

(2) 因为  $a > 0$ , 所以函数  $f(x) = ax^2 - (a-1)x - 2$  的图象开口向上, 对称轴为  $x = \frac{a-1}{2a} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2a} < \frac{1}{2}$ .

当  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2a} \leq -\frac{1}{2}$ , 即  $0 < a \leq \frac{1}{2}$  时,

$f(x)_{\min} = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3a-10}{4} = -\frac{9}{4}$ ,

解得  $a = \frac{1}{3} \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ , 满足题意;

当  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2a} > -\frac{1}{2}$ , 即  $a > \frac{1}{2}$  时,

$f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2a}\right) =$

$-\frac{a^2+6a+1}{4a} = -\frac{9}{4}$ ,  $a^2 - 3a + 1 = 0$ ,

解得  $a = \frac{3-\sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2}$  或  $a = \frac{3+\sqrt{5}}{2} >$

$\frac{1}{2}$ , 所以  $a = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ .

综上所述,  $a = \frac{1}{3}$  或  $a = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ .

### 985 冲刺专题四 求二次函数的最值

1. D 【解析】 $\because f(x) = x^2 + 3x + 2$  的图象开口向上, 对称轴为  $x = -\frac{3}{2}$ ,

$\therefore f(x)$  在  $\left(-5, -\frac{3}{2}\right]$  上单调递减,

在  $\left(-\frac{3}{2}, 5\right)$  上单调递增.

$\therefore$  当  $x = -\frac{3}{2}$  时,  $f(x)$  取得最小值

$f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ . 又  $\because (-5, 5)$  为开区间,  $\therefore f(x)$  无最大值. 故 D 正确.

2. C 【解析】因为函数  $f(x) = -x^2 + 2x + 5 = -(x-1)^2 + 6$ , 所以函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上单调递增, 在  $[1, +\infty)$  上单调递减, 当  $x = 1$  时,  $f(x)$  取得最大值 6, 又  $f(0) = f(2) = 5$ , 所以  $1 \leq m \leq 2$ .

则实数  $m$  的取值范围是  $[1, 2]$ .

3. C 【解析】因为二次函数  $y = -x^2 + 2x + 3 = -(x-1)^2 + 4$  的图象的对称轴为  $x = -\frac{2}{2 \times (-1)} = 1$ , 开口向下, 所以  $x = t$  或  $x = t+2$  时取得函数的最小值.

由  $-x^2 + 2x + 3 = -5$ , 可得  $x = -2$  或  $x = 4$ .

当  $t = -2$  时,  $t+2 = 0$ ,  $y_{\max} = 3$ ;

当  $t+2 = -2$  时显然不合题意;

当  $t = 4$  时显然不合题意;

当  $t+2 = 4$  时,  $t = 2$ ,  $y_{\max} = 3$ . 所以  $m$  等于 3.

4. A 【解析】由题意知  $a < b$ . 当  $ab < 0$  时,  $t = 0$ , 则  $b^2 \leq 1$ ,  $a^2 \leq 1$ , 即  $b \leq 1$ ,



$$a \geq -1.$$

即当  $a = -1, 0 < b \leq 1$  或者  $b = 1, -1 \leq a < 0$  时,  $1 < b - a \leq 2$ , 则  $b - a$  有最大值 2;

当  $ab \geq 0$  时, 不妨设  $0 \leq a < b$ , 此时  $b^2 = t + 1 \geq 1, a^2 = t \geq 0$  则  $b^2 - a^2 = 1$ ,

所以  $b - a = \frac{1}{a + b}$ , 而  $a = \sqrt{t} \geq 0, b =$

$$\sqrt{t+1} \geq 1, b - a = \sqrt{t+1} - \sqrt{t} = \frac{(\sqrt{t+1} - \sqrt{t})(\sqrt{t+1} + \sqrt{t})}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}},$$

由  $\frac{1}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}}$  单调递减可得当  $t = 0$

时,  $b - a = \frac{1}{\sqrt{t+1} + \sqrt{t}}$  有最大值 1, 无

最小值.

综上所述,  $b - a$  有最大值 2, 无最小值.

5.  $[3, +\infty)$  【解析】因为函数  $f(x) = x^2 - 4x + 8$  的图象的对称轴为  $x = 2$ , 开口向上. 所以, 要使在  $x = a$  处取得最大值, 只需  $\begin{cases} |a - 2| \geq |2 - 1|, \\ a > 1, \end{cases}$  解得  $a \geq 3$ , 即实数  $a$  的取值范围是  $[3, +\infty)$ .

6.  $\frac{3}{8}$  【解析】根据题意可知  $a \neq 0$ , 因为  $a = 0$  时不存在最值.  $f(x)$  图象的对称轴方程为  $x = -1$ .

(1) 若  $a < 0$ , 则函数图象开口向下, 函数在  $[1, 2]$  上单调递减. 当  $x = 1$  时, 函数取得最大值 4, 即  $f(1) = a + 2a + 1 = 4$ , 解得  $a = 1$  (舍).

(2) 若  $a > 0$ , 函数图象开口向上, 函数在  $[1, 2]$  上单调递增, 当  $x = 2$  时, 函数取得最大值 4, 即  $f(2) = 4a + 4a + 1 = 4$ , 解得  $a = \frac{3}{8}$ .

综上所述,  $a = \frac{3}{8}$ .

7.  $\frac{9}{5}$  【解析】由题知函数  $f(x)$  图象的对称轴为  $x = t$ , 又函数  $f(x)$

在  $[2, 5]$  上为单调函数, 所以  $t \leq 2$  或  $t \geq 5$ .

当  $t \leq 2$  时,  $f(x)$  在  $[2, 5]$  上单调递增, 则  $f(x)_{\max} = f(5) = 26 - 10t = 8$ , 解得  $t = \frac{9}{5}$ ;

当  $t \geq 5$  时,  $f(x)$  在  $[2, 5]$  上单调递减, 则  $f(x)_{\max} = f(2) = 5 - 4t = 8$ , 解得  $t = -\frac{3}{4} < 5$ , 故不成立.

8.  $[1, \sqrt{2}]$  【解析】函数  $f(x) = x^2 - 2tx + 1$  的图象的对称轴为  $x = t$ . 由于函数  $f(x) = x^2 - 2tx + 1$  在区间  $(-\infty, 1]$  上单调递减, 所以  $t \geq 1$ . 故当  $x \in [0, t + 1]$  时,  $f(x)_{\min} = f(t) = -t^2 + 1, f(x)_{\max} = f(0) = 1$ , 故由  $f(x)_{\max} - f(x)_{\min} \leq 2$  得  $1 - (-t^2 + 1) \leq 2, \therefore -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ , 结合  $t \geq 1$ , 可得实数  $t$  的取值范围是  $[1, \sqrt{2}]$ .

9. 【解】(1) 设  $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ , 而  $f(0) = 0, f(x+1) = f(x) + x + 1$ , 则  $\begin{cases} c = 0, \\ a(x+1)^2 + b(x+1) + c = ax^2 + bx + c + x + 1, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} a = \frac{1}{2}, \\ b = \frac{1}{2}, \\ c = 0, \end{cases} \therefore f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.$

(2) 由 (1) 得  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x =$

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}.$$

$\therefore -1 \leq x \leq 1, \therefore f(x)$  在  $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$  递减, 在  $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$  上单调递增.

$$\text{故 } f(x)_{\min} = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}, f(x)_{\max} = f(1) = 1.$$

10. 【解】(1)  $\because f(2+x) = f(2-x), \therefore$  函数图象的对称轴为  $x = 2, \therefore$  二次函数  $f(x) = ax^2 + bx + c,$

$$\therefore -\frac{b}{2a} = 2 \text{ ①. 又 } \because f(x) > 0 \text{ 的解集}$$

为  $(-2, c), \therefore ax^2 + bx + c = 0$  的两个根是  $-2, c$ , 且  $a < 0$ , 即  $4a - 2b + c = 0$  ②,  $ac^2 + bc + c = 0$  ③,

联立 ① ② ③, 解得  $a = -\frac{1}{2}, b = 2, c = 6$ .

$\therefore$  函数的解析式为  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$ .

(2)  $f(x)$  在区间  $[m, m+1]$  的最大值记为  $h(m)$ .

当  $m+1 < 2$ , 即  $m < 1$  时,

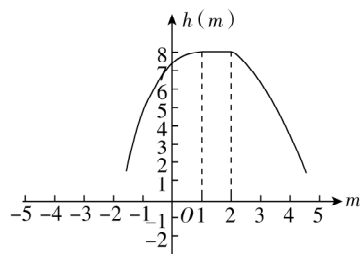
函数  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$  在  $[m, m+1]$  上是增函数, 函数的最大值为  $f(m+1) = -\frac{1}{2}m^2 + m + \frac{15}{2}$ ;

当  $m > 2$  时, 函数  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$  在  $[m, m+1]$  上是减函数, 函数的最大值为  $f(m) = -\frac{1}{2}m^2 + 2m + 6$ ;

当  $m \leq 2 \leq m+1$ , 即  $1 \leq m \leq 2$  时, 函数  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$  在  $[m, m+1]$  上的最大值为  $f(2) = 8$ .

$$\text{综上, } h(m) = \begin{cases} 8, & 1 \leq m \leq 2, \\ -\frac{1}{2}m^2 + 2m + 6, & m > 2, \\ -\frac{1}{2}m^2 + m + \frac{15}{2}, & m < 1, \end{cases}$$

函数  $h(m)$  的图象为



所以函数  $h(m)$  的最大值为 8.

## §4 函数的奇偶性与简单的幂函数

### 4.1 函数的奇偶性



#### 基础满分

**1. B** 【解析】不知  $f(x)$  奇偶性, 因此  $f(-x)$  与  $f(x)$  的关系不确定,  $|f(-x)|$  与  $|f(x)|$  关系也不确定, 故 A 错误;  $f(|-x|) = f(|x|)$ , 是偶函数, 故 B 正确;  $\frac{1}{f(x)}$  与  $\frac{1}{f(-x)}$  关系也不确定, 不知其奇偶性, 故 C 错误;  $f(-x) - f(x) = -[f(x) - f(-x)]$ , 是奇函数, 故 D 错误.

**2. B** 【解析】函数  $y = f(x)$ ,  $x \in [-1, a]$  ( $a > -1$ ) 是奇函数, 可知  $-1 = -a$ , 解得  $a = 1$ , 故 B 正确.



#### 易错警示 忽略函数的定义域而致错

判断函数的奇偶性, 首先确定函数的定义域, 是不是关于原点对称, 如果定义域不是关于原点对称, 则函数就是非奇非偶函数. 反之, 函数具有奇偶性, 定义域一定关于原点对称.

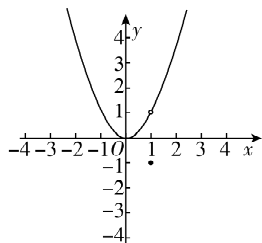
**3. A** 【解析】 $y = \frac{1}{x}$  是奇函数, 但不单调, 故 B 错误;  
 $y = 2x^2$  是偶函数且不单调, 故 C 错误;  
 $y = -\frac{1}{3}x$  是奇函数但单调递减, 故 D 错误;  
 $y = 3x$  既是奇函数又是增函数, 故 A 正确.

**4. C** 【解析】函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 若  $f(x)$  为奇函数, 则  $f(0) = 0$ ; 若  $f(0) = 0$ , 不一定有  $f(-x) = -f(x)$ , 比如  $f(x) = x^2$ , 满足  $f(0) = 0$ , 但  $f(x)$  不为奇函数, 故  $p$  是  $q$  的充分不必要条件, 故 C 正确.

**5. D** 【解析】函数的解析式  $f(x) =$

$$\begin{cases} \frac{x^3 - x^2}{x - 1}, & x \neq 1, \\ -1, & x = 1 \end{cases} = \begin{cases} x^2, & x \neq 1, \\ -1, & x = 1, \end{cases} \text{ 绘制函}$$

数图象如图所示, 观察可得, 函数  $f(x)$  是非奇非偶函数, 故 D 正确.



**6. B** 【解析】题中所给函数的定义域为  $\mathbf{R}$ , 关于坐标原点对称.

对于函数  $f(x)$ , 由函数的解析式有  $f(-x) = |-x + a| - |-x - a| = |x - a| - |x + a| = -f(x)$ , 据此可得函数  $f(x)$  为奇函数.

对于函数  $h(x)$ , 当  $x > 0$  时,  $-x < 0$ ,  $h(-x) = (-x)^2 + (-x) = -(-x^2 + x) = -h(x)$ ; 当  $x < 0$  时,  $-x > 0$ ,  $h(-x) = -(-x)^2 + (-x) = -(x^2 + x) = -h(x)$ ; 当  $x = 0$  时  $h(0) = 0$ . 据此可得函数  $h(x)$  是奇函数, 故 B 正确.

**7. -15** 【解析】根据题意, 当  $x < 0$  时,  $f(x) = g(x)$ ,  $f(x)$  为奇函数,  $g(-1) = f(-1) = -f(1) = -(1^2 + 2 \times 1) = -3$ , 则  $f(g(-1)) = f(-3) = -f(3) = -(3^2 + 2 \times 3) = -15$ .

**8. A** 【解析】根据题意, 在  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  中, 令  $x = 0$  可得  $f(0) = f(0) + f(0)$ , 即  $f(0) = 0$ . 在  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  中, 令  $y = -x$  可得  $f(0) = f(x) + f(-x)$ , 而  $f(0) = 0$ , 则有  $f(-x) = -f(x)$ , 即函数  $f(x)$  是奇函数, 故 A 正确.

**9. B** 【解析】由题意可知  $\begin{cases} f(2) + g(2) = 4, \\ f(-2) + g(-2) = 0, \end{cases}$  两式相加可得  $f(2) + f(-2) + g(2) + g(-2) = 4$ ,  $\therefore f(x)$  是偶函数,  $g(x)$  是奇函数,  $\therefore f(2) = f(-2)$ ,  $g(2) + g(-2) = 0$ ,

$\therefore 2f(2) = 4$ , 即  $f(2) = 2$ . 故 B 正确.

**10. B** 【解析】 $\because f(x)$  是奇函数,  $g(x)$  是偶函数,  $\therefore |f(-x)| = |-f(x)| = |f(x)|$ ,  $|g(-x)| = |g(x)|$ ,  $\therefore |f(x)|$  为偶函数,  $|g(x)|$  为偶函数, 再根据“在公共定义域内, 两个奇函数的积是偶函数, 两个偶函数的积还是偶函数, 一个奇函数与一个偶函数的积是奇函数”, 可得  $f(x)g(x)$  是奇函数,  $f(x)|g(x)|$  是奇函数,  $|f(x)|g(x)$  是偶函数,  $|f(x)|g(x)$  是偶函数, 故 B 正确.

**11. C** 【解析】定义在  $\mathbf{R}$  上的函数  $f(x)$  满足: 对任意  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ , 有  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) + 1$ , 令  $x_1 = x_2 = 0$ , 则  $f(0) = f(0) + f(0) + 1$ , 解得  $f(0) = -1$ , 令  $x_1 = x$ ,  $x_2 = -x$ , 由  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) + 1$ , 得  $f(x - x) = f(x) + f(-x) + 1$ , 即  $f(0) = f(x) + f(-x) + 1$ , 化为  $f(-x) + 1 = -(f(x) + 1)$ ,  $\therefore$  对任意的  $x$ , 有  $f(-x) + 1 = -(f(x) + 1)$ ,  $\therefore$  函数  $f(x) + 1$  是奇函数. 故 C 正确.

**12. A** 【解析】因为  $f(x+2)$  为偶函数, 所以  $f(-x+2) = f(x+2)$ , 令  $x = 1$ , 则有  $f(1) = f(3)$ , 所以  $f(x)$  的图象关于  $x = 2$  对称, 且有  $f(-x) = f(x+4)$ . 又因为  $f(x+1)$  为奇函数, 所以  $f(-x+1) = -f(x+1)$ . 令  $x = 0$ , 则有  $f(1) = -f(1)$ , 所以  $f(1) = 0$ , 所以  $f(3) = f(1) = 0$ , 且有  $f(-x) = -f(x+2)$ , 所以  $f(x+4) = -f(x+2)$ , 即  $f(x) = -f(x+2)$ . 所以  $f(x+4) = -f(x+2) = f(x)$ ,  $f(-1) = f(-1+4) = f(3) = f(1) = 0$ , 故 A 正确;  $f(0) = f(0+4) = f(4)$ , 无法确定  $f(0)$  的值, 故无法确定 BD 的正确性; 在  $f(x) = -f(x+2)$  中, 令  $x = 0$ , 则

有  $f(2) = -f(0)$ , 无法确定  $f(0)$  的值, 故无法确定  $f(2)$  的值, 从而无法确定 C 的正确性.

- 13. A** 【解析】函数  $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ , 可得  $y = f(x-1) + 1 = \frac{1-x+1}{1+x-1} + 1 = \frac{2}{x}$  为奇函数, 其图象关于原点对称, 故 A 正确;  $y = f(x-1) - 1 = \frac{2}{x} - 2$  不是奇函数, 其图象不关于原点对称, 故 B 错误;  $y = f(x+1) + 1 = \frac{1-x-1}{1+x+1} + 1 = 1 - \frac{x}{x+2} = \frac{2}{x+2}$  不是奇函数, 其图象不关于原点对称, 故 C 错误;  $y = f(x+1) - 1 = \frac{1-x-1}{1+x+1} - 1 = -1 - \frac{x}{x+2} = -2 + \frac{2}{x+2}$  不是奇函数, 其图象不关于原点对称, 故 D 错误.

- 14. B** 【解析】因为函数  $y = f(x-a) + b$  是奇函数, 所以  $f(x)$  的图象关于  $(-a, -b)$  对称. 因为函数  $y = f(x)$  与  $y = h(x)$  的图象关于  $x$  轴对称, 所以  $y = h(x)$  的图象关于  $(-a, b)$  对称, 故 B 正确.

- 15. C** 【解析】因为函数  $f(x+1)$  的图象关于点  $(0, 2)$  对称, 所以  $f(x)$  的图象关于点  $(1, 2)$  对称, 所以  $f(1-x) + f(1+x) = 4$ , 结合选项可知,  $f(0) + f(2) = 4$  一定成立, 故 C 正确.

- 16. C** 【解析】根据题意, 依次分析选项:

对于 A, 因为  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 且  $f(-x) = -x + \sqrt[3]{-x} = -(x + \sqrt[3]{x}) = -f(x)$ , 所以  $f(x) = x + \sqrt[3]{x}$  为奇函数, 其图象关于原点对称, 故错误;

对于 B, 因为  $f(x) = \frac{2x+1}{x-2} = \frac{2x-4+5}{x-2} = 2 + \frac{5}{x-2}$ , 所以  $f(x) =$

$\frac{2x+1}{x-2}$  的图象可由反比例函数  $y = \frac{5}{x}$  的图象向右平移 2 个单位, 向上平移 2 个单位得到, 且反比例函数  $y = \frac{5}{x}$  的图象关于原点对称,

所以函数  $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$  的图象关于点  $(2, 2)$  对称, 故错误; 对于 C, 因为  $f(-x) = \frac{-x+1}{-x-2} = \frac{1-x}{-x-2} = \frac{1-x}{-(x+2)} = -\frac{1-x}{x+2} = -\frac{1-x-1+1}{x+2} = -\frac{-x}{x+2} = \frac{x}{x+2} = \frac{x+2-2}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2}$ , 所以  $f(x)$  为偶函数, 又  $f(x)$  不是常函数, 所以  $f(x) = \frac{1}{x+2} + 1$  的图象不是中心对称图形, 故正确;

对于 D, 因为函数  $f(x) = \begin{cases} x(1+x), & x \geq 0, \\ x(1-x), & x < 0 \end{cases}$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 且  $f(0) = 0$ , 当  $x > 0$  时,  $-x < 0$ ,  $f(-x) = -x(1-x) = -f(x)$ , 当  $x < 0$  时,  $-x > 0$ ,  $f(-x) = -x(1-x) = -f(x)$ , 所以函数  $f(x)$  为奇函数, 图象关于原点对称, 故错误.

- 17. 2** 【解析】 $\because$  函数  $y = \frac{x+1}{x-b} = \frac{x-b+b+1}{x-b} = 1 + \frac{b+1}{x-b}$  的图象关于点  $(b, 1)$  对称, 再根据它的图象关于点  $(2, c)$  中心对称,  $\therefore b = 2, c = 1$ , 则  $bc = 2$ .

- 18. B** 【解析】 $x^2 + 2 \neq 0$  恒成立, 故①正确;

$f(-x) = -\frac{x}{x^2+2} = -f(x)$  为奇函数, 故②错误;

令  $x-2=t$ ,  $\therefore f(x-2) = f(t)$ ,  $f(t)$  与  $f(x)$  的值域相同, 故③正确;

$x \in (0, 1)$ ,  $f(x) = \frac{1}{2+x}$ , 令  $y = \frac{1}{u}$ ,

$u = x + \frac{2}{x}$ , 由复合函数单调性知,  $f(x)$  在  $(0, 1)$  上递增, 故④正确;

$x \in [1, 2]$ ,  $f(x) = \frac{1}{x+\frac{2}{x}} \leq$

$\frac{1}{2\sqrt{x \cdot \frac{2}{x}}} = \frac{\sqrt{2}}{4} > \frac{1}{3}$ , 当  $x = \sqrt{2}$  时取等号, 故⑤错误.

所以正确的有 3 个, 故 B 正确.

- 19. BD** 【解析】根据题意, 因为

$f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+2}$ , 定义域为  $\mathbf{R}$ , 有  $f(-x) = \frac{(-x)^2-2}{(-x)^2+2} = \frac{x^2-2}{x^2+2} = f(x)$ ,

所以  $f(x)$  为偶函数, 其图象关于  $y$  轴对称, 故 A 错误, B 正确;

令  $t = x^2 + 2 (t \geq 2)$ , 当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $t = x^2 + 2$  单调递增;

当  $x \in (-\infty, 0)$  时,  $t = x^2 + 2$  单调递减, 而  $y = \frac{t-4}{t} = 1 - \frac{4}{t}$  在  $(2, +\infty)$  单调递增,

所以由复合函数单调性可知  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  单调递增, 在  $(-\infty, 0)$  单调递减, 故 C 错误;

因为  $y = \frac{t-4}{t} = 1 - \frac{4}{t}$ , 由  $t \geq 2$ , 有  $0 < \frac{4}{t} \leq 2$ , 所以  $-2 \leq -\frac{4}{t} < 0$ , 故  $-1 \leq 1 - \frac{4}{t} < 1$ , 即  $f(x) \in [-1, 1)$ , 故 D 正确.

- 20. ①②③** 【解析】当  $c = 0$  时,  $f(x) = x|x| + bx$ ,  $f(-x) = -x|x| - bx = -(x|x| + bx) = -f(x)$ , 所以  $y = f(x)$  是奇函数, 故①正确; 当  $b = 0, c > 0$  时, 由  $f(x) = 0$  可得  $x|x| = -c < 0$ , 只有当  $x < 0$  时, 方程  $x|x| = -c < 0$  才有解, 此时  $x^2 = c (x < 0)$ , 解得  $x = -\sqrt{c}$ , 方程  $f(x) = 0$  只有一个实根, 故②正确;  $\therefore f(x) + f(-x) = x|x| + bx + c + (-x|-x| - bx + c) = 2c$ ,  $\therefore y = f(x)$  的图象关于点  $(0, c)$  对称, 故③正确;

当  $b=-1, c=0$  时, 方程  $f(x)=0$  显然有 3 个根,  $x=0$  或  $x=1$  或  $x=-1$ , 故④错误.

**21. 【解】**(1)  $\because$  函数  $f(x)=\frac{x+a-1}{x^2+1}$  的

定义域为  $\mathbf{R}$ , 且为奇函数,

$\therefore f(0)=a-1=0, \therefore a=1$ .

(2) 由 (1) 得  $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ , 在  $(1, +\infty)$  上单调递减.

证明: 令  $1 < x_1 < x_2$ , 则  $x_2 - x_1 > 0$ ,  $x_1 x_2 > 1, x_1 x_2 - 1 > 0$ ,

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{x_1^2+1} - \frac{x_2}{x_2^2+1}$$

$$= \frac{x_1(x_2^2+1) - x_2(x_1^2+1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$$

$$= \frac{(x_1 x_2 - 1)(x_2 - x_1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)} > 0,$$

$\therefore f(x_1) > f(x_2)$ , 即  $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$  在

$(1, +\infty)$  上单调递减.

(3)  $\because m > 0, n > 0$ , 且  $m+n=5a=5$ ,  $\therefore m+n+3=8$ ,

$$\text{则 } \frac{1}{m} + \frac{1}{n+3} = \frac{1}{8} \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{n+3} \right) (m+n+3)$$

$$= \frac{1}{8} \left( 1 + 1 + \frac{n+3}{m} + \frac{m}{n+3} \right) \geq$$

$$\frac{1}{8} \left( 2 + 2\sqrt{\frac{n+3}{m} \cdot \frac{m}{n+3}} \right) = \frac{1}{2} \quad \left( \text{当} \right.$$

且仅当  $\frac{n+3}{m} = \frac{m}{n+3}$ , 即  $m=n+3=4$ ,

即  $m=4, n=1$  时取等号),  $\therefore \frac{1}{m} +$

$\frac{1}{n+3}$  的最小值为  $\frac{1}{2}$ .

### 重难上分

**1. A 【解析】**根据题意, 设  $x < 0$ , 则  $-x > 0$ , 函数  $f(x)$  为  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = x^2 - 2x$ , 则  $f(x) = -f(-x) = -[(-x)^2 - 2 \cdot (-x)] = -(x^2 + 2x) = -x^2 - 2x$ , 故 A 正确.

**2. D 【解析】**已知  $f(x)$  为偶函数, 当  $x > 0$  时,  $f(x) = x^2 + x$ , 当  $x < 0$  时,

则  $-x > 0$ , 所以  $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$ , 所以  $f(x) = f(-x) = x^2 - x$ , 故 D 正确.

**3. D 【解析】**根据题意, 函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 则  $f(0)=0$ . 当  $x < 0$  时,  $-x > 0, f(-x) = (-x)^2 - (-x) = x^2 + x$ .

又由  $f(x)$  为奇函数, 则  $f(x) = -f(-x) = -(x^2 + x) = -x^2 - x, f(0) = 0$  也符合  $f(x) = -x^2 - x$ , 则有  $f(x) = -x^2 - x (x \leq 0)$ .

综上可得  $f(x) = \begin{cases} -x^2 - x, & x \leq 0, \\ x^2 - x, & x > 0. \end{cases}$  故

D 正确.

**4. C 【解析】**由题意知  $g(x)$  为定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 则  $g(0)=0$ .

当  $x < 0$  时,  $g(x) = x^2 - x - 4$ ;

当  $x > 0$  时,  $g(x) = -g(-x) = -x^2 - x + 4$ ,

$$\text{故 } g(x) = \begin{cases} -x^2 - x + 4, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ x^2 - x - 4, & x < 0. \end{cases}$$

由  $f(x) \leq 2$ , 得  $\begin{cases} x^2 + x \leq 2, \\ x < 0 \end{cases}$  或

$$\begin{cases} -x^2 \leq 2, \\ x \geq 0, \end{cases}$$

解得  $-2 \leq x < 0$  或  $x \geq 0$ , 则  $x \in [-2, +\infty)$ .

所以  $g(a) \in [-2, +\infty)$  时,  $f(g(a)) \leq 2$ .

当  $a < 0$  时,  $a^2 - a - 4 \geq -2$ , 解得  $a \geq 2$  或  $a \leq -1$ , 则  $a \leq -1$ ,

当  $a = 0$  时,  $g(0) = 0$ , 满足  $g(a) \in [-2, +\infty)$ ;

当  $a > 0$  时,  $-a^2 - a + 4 \geq -2$ , 解得  $-3 \leq a \leq 2$ , 则  $0 < a \leq 2$ .

综上,  $a$  的取值范围为  $(-\infty, -1] \cup [0, 2]$ . 故 C 正确.

**5. (1) 【解】**由  $f(0)=0$  得  $b=0$ .

因为  $f(x)$  为奇函数, 所以  $f(-x) = -f(x)$ ,

当  $x \in (-1, 0)$  时,  $\frac{-ax}{1-x} = -\frac{x}{1-x}$ ,

故  $a=1$ ,

$$\text{故 } f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x}, & -1 < x \leq 0, \\ \frac{x}{1+x}, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

(2) 【解】任取  $x_1, x_2 \in (0, 1)$ , 且

$$x_1 < x_2, \text{ 则 } f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{1+x_1} -$$

$$\frac{x_2}{1+x_2} = \frac{x_1 - x_2}{(1+x_1)(1+x_2)}. \because x_1, x_2 \in$$

$(0, 1)$ , 且  $x_1 < x_2, \therefore f(x_1) - f(x_2) < 0$ , 即  $f(x_1) < f(x_2), \therefore f(x)$  在  $(0, 1)$

上是增函数.

(3) 【解】 $\because f(x)$  为奇函数, 由 (2)

可知  $f(x)$  在  $(0, 1)$  上是增函数,

$\therefore f(x)$  在  $(-1, 1)$  上是增函数,

而  $f(t-1) + f(t) < 0 \Rightarrow f(t-1) < -f(t) \Rightarrow f(t-1) < f(-t)$ , 故

$$\begin{cases} -1 < t-1 < 1, \\ -1 < -t < 1, \\ t-1 < -t, \end{cases} \text{ 解得 } \left\{ t \mid 0 < t < \frac{1}{2} \right\}.$$

**6. C 【解析】**因为函数  $f(x)$  为  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 当  $x < 0$  时,  $f(x) = x + 2$ , 所以  $f(3) = -f(-3) = -(-3 + 2) = 1$ . 而  $f(0) = 0$ , 所以  $f(0) + f(3) = 1$ , 故 C 正确.

**7. B 【解析】**因为  $f(x)$  为偶函数, 所以  $f(2) = f(-2)$ . 又当  $x < 0$  时,  $f(x) = x^3 - 2x + 1$ , 所以  $f(-2) = (-2)^3 - 2 \times (-2) + 1 = -3$ . 所以  $f(2) = f(-2) = -3$ , 故 B 正确.

**8. B 【解析】**因为函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 所以  $f(-x) = -f(x)$ , 且  $f(0) = 0$ , 又  $f(x+2)$  为偶函数, 所以  $f(-x+2) = f(x+2)$ , 所以  $f(4) = f(0) = 0, f(6) = f(-2) = -f(2) = -1, f(8) = f(-4) = -f(4) = 0, f(10) = f(-6) = -f(6) = 1$ , 得到  $f(4) + f(6) + f(8) + f(10) = 0$ , 故 B 正确.

**9. A 【解析】**根据题意, 由  $f(x) + g(x) = x^2 - x + 1$  ①得  $f(-x) + g(-x) = x^2 + x + 1$ . 因为  $f(x)$  为奇函数,  $g(x)$  为偶函数, 所以  $f(-x) =$



$-f(x), g(-x) = g(x)$ . 所以  $-f(x) + g(x) = x^2 + x + 1$  ②, 由 ①② 得  $2f(x) = -2x$ , 所以  $f(x) = -x$ , 则  $f(2) = -2$ , 故 A 正确.

**10. B** 【解析】奇函数的函数图象关于坐标原点中心对称, 则若奇函数  $f(x)$  在区间  $[3, 7]$  上是增函数且最小值为 5, 那么  $f(x)$  在区间  $[-7, -3]$  上是增函数且最大值为 -5, 故 B 正确.

**11. D** 【解析】根据题意, 函数  $f(x) = x^2 + ax + 1$  是定义在  $(-b, 2b-2)$  上的偶函数, 所以  $\begin{cases} -b+2b-2=0, \\ a=0, \end{cases}$  则  $\begin{cases} a=0, \\ b=2. \end{cases}$  所以  $f(x) = x^2 + 1$ , 则  $f\left(\frac{b}{2}\right) = f(1) = 1^2 + 1 = 2$ , 故 D 正确.

**12. B** 【解析】根据题意, 函数  $f(x) = (x+a-2)(2x^2+a-1)$  为奇函数, 则有  $f(-x) = -f(x)$ , 即  $(-x+a-2)(2x^2+a-1) = -(x+a-2) \cdot (2x^2+a-1)$ , 变形可得  $a-2 = -a+2$ , 必有  $a=2$ , 故 B 正确.

**13. D** 【解析】因为  $f(x) = \frac{x^2+x+3}{x} + a = x + \frac{3}{x} + 1 + a$  是奇函数, 所以  $f(-x) = -f(x)$ , 即  $-x + \frac{3}{-x} + 1 + a = -\left(x + \frac{3}{x} + 1 + a\right)$ , 解得  $a = -1$ , 则  $f(-1) = -1 - 3 = -4$ , 故 D 正确.

**14. B** 【解析】 $\because f(x)$  是定义在  $(-2a+2, 0) \cup (0, a)$  上的偶函数,  $\therefore -2a+2+a=0$ , 解得  $a=2$ ,  $\therefore f(x) = \frac{2x^3+x+2-2b}{x}$ ,  $\therefore f(-x) = f(x)$ , 即  $\frac{-2x^3-x+2-2b}{-x} = \frac{2x^3+x+2-2b}{x}$ ,  $\therefore \frac{2x^3+x-(2-2b)}{x} = \frac{2x^3+x+2-2b}{x}$ ,  $\therefore 2-2b=0$ ,  $\therefore f(x) = 2x^2 + 1$ ,

$f(1) = 2+1=3$ . 故 B 正确.

**15. D** 【解析】因为函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数, 所以  $f(-2) = f(2) = 3 \times (-2)^2 + 2 + 2a + 1 = 13$ , 解得  $a = -1$ , 故 D 正确.

**16. B** 【解析】因为  $f(x) = \frac{ax^2+bx}{x^2+1}$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 且为偶函数, 所以  $f(-x) = f(x)$ , 即  $\frac{ax^2-bx}{x^2+1} = \frac{ax^2+bx}{x^2+1}$ , 解得  $b=0$ , 所以  $f(x) = \frac{ax^2}{x^2+1}$ , 又因为  $f(1) = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$ , 即  $a=1$ , 所以  $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ . 因为  $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2}{x^2+1} + \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+1} = \frac{x^2}{x^2+1} + \frac{1}{1+x^2} = 1$ , 所以  $f\left(\frac{1}{2^{024}}\right) + f\left(\frac{1}{2^{023}}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f(2) + \cdots + f(2^{024}) = \left[f\left(\frac{1}{2^{024}}\right) + f(2^{024})\right] + \left[f\left(\frac{1}{2^{023}}\right) + f(2^{023})\right] + \cdots + \left[f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2)\right] + f(1) = 2^{023} + \frac{1}{2} = \frac{4^{047}}{2}$ . 故 B 正确.

**17. 【解】**(1) 因为  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 所以  $f(0) = \frac{-a}{b} = 0$ , 解得  $a=0$ . 又因为  $f(2) = 1$ , 所以  $f(2) = \frac{8-a}{4+b} = 1$ , 解得  $b=4$ , 所以  $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$ , 满足  $f(-x) = \frac{-4x}{x^2+4} = -f(x)$ , 则  $f(x)$  为奇函数, 所以  $a=0, b=4$ . (2)  $f(x)$  在  $[2, +\infty)$  上单调递减.

由 (1) 知  $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$ ,

当  $x \geq 2$  时,  $f(x) = \frac{4x}{x^2+4} = \frac{4}{x + \frac{4}{x}}$ .

由对勾函数性质可知  $y = x + \frac{4}{x}$  在  $[2, +\infty)$  上单调递增, 所以  $f(x) = \frac{4x}{x^2+4} = \frac{4}{x + \frac{4}{x}}$  在  $[2, +\infty)$  上单调递减.

(3) 由 (2) 可知  $f(x)$  在  $[2, 4]$  上单调递减, 所以  $f(x)_{\max} = f(2) = 1, f(x)_{\min} = f(4) = \frac{4}{5}$ . 记  $f(x)$  在区间  $[2, 4]$  上的值域为  $A = \left[\frac{4}{5}, 1\right]$ .

当  $m=0$  时,  $g(x) = -2x+2$  在  $[0, 1]$  上单调递减, 则  $g(x)_{\max} = g(0) = 2, g(x)_{\min} = g(1) = 0$ , 得  $g(x)$  在区间  $[0, 1]$  上的值域为  $B = [0, 1]$ .

因为  $A \subseteq B$ , 所以对任意的  $x_1 \in [2, 4]$ , 总存在  $x_2 \in [0, 1]$ , 使得  $f(x_1) = g(x_2)$  成立.

当  $0 < m \leq 1$  时,  $\frac{1}{m} \geq 1, g(x)$  在  $[0, 1]$  上单调递减, 则  $g(x)_{\max} = g(0) = 2-m, g(x)_{\min} = g(1) = 0$ , 得  $g(x)$  在区间  $[0, 1]$  上的值域为  $B = [0, 2-m]$ . 因为  $A \subseteq B$ , 所以对任意的  $x_1 \in [2, 4]$ , 总存在  $x_2 \in [0, 1]$ , 使得  $f(x_1) = g(x_2)$  成立.

当  $1 < m \leq 2$  时,  $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{m} < 1, g(x)$  在  $\left[0, \frac{1}{m}\right]$  上单调递减, 在  $\left[\frac{1}{m}, 1\right]$  上单调递增, 则  $g(x)_{\max} = g(0) = 2-m, g(x)_{\min} = g\left(\frac{1}{m}\right) = -\frac{1}{m} + 2-m$ , 得  $g(x)$  在区间  $[0,$

1] 上的值域为  $B = \left[-\frac{1}{m}+2-m, 2-m\right]$ .

所以  $\begin{cases} -\frac{1}{m}+2-m \leq \frac{4}{5}, \\ 2-m \geq 1, \\ 1 < m \leq 2, \end{cases}$  无解.

当  $m > 2$  时,  $0 < \frac{1}{m} < \frac{1}{2}$ ,  $g(x)$  在  $\left[0, \frac{1}{m}\right]$  上单调递减, 在  $\left[\frac{1}{m}, 1\right]$  上单调递增, 则  $g(x)_{\max} = g(1) = 0$ ,  $g(x)_{\min} = g\left(\frac{1}{m}\right) = -\frac{1}{m} + 2 - m$ , 得  $g(x)$  在区间  $[0, 1]$  上的值域为  $B = \left[-\frac{1}{m} + 2 - m, 0\right]$ , 不符合题意. 综上, 非负实数  $m$  的取值范围为  $[0, 1]$ .

**18. C** 【解析】因为  $f(x) = x^3 - 2021x + 1$ , 所以令  $g(x) = f(x) - 1 = x^3 - 2021x$ , 因为  $g(-x) = (-x)^3 - 2021 \cdot (-x) = -(x^3 - 2021x) = -g(x)$ , 所以  $g(x)$  为奇函数, 则  $g(-x) + g(x) = 0$ , 故  $f(-x) - 1 + f(x) - 1 = 0$ , 所以  $f(x) + f(-x) = 2$ , 则函数  $f(x)$  图象的对称中心为  $(0, 1)$ , 故 C 正确.

**19. D** 【解析】 $\because f(x) = ax^5 + bx^3 + 1 (a, b \in \mathbf{R})$ ,  $\therefore f(-x) + f(x) = a(-x)^5 + b(-x)^3 + 1 + ax^5 + bx^3 + 1 = 2$ , 又  $f(2) = 5$ , 则  $f(-2) = 2 - 5 = -3$ , 故 D 正确.

**20. A** 【解析】根据题意, 设  $g(x) = f(x) - a = x^3 + 2x$ , 则  $g(-x) = (-x)^3 + 2(-x) = -(x^3 + 2x)$ . 又  $g(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 从而  $g(x)$  是奇函数, 即  $g(x) + g(-x) = 0$ , 故  $f(x) - a + f(-x) - a = 0$ , 即  $f(x) + f(-x) = 2a$ . 因为  $f(m) + f(-m) = 2$ , 所以  $2a = 2$ , 解得  $a = 1$ , 则  $f(x) = x^3 + 2x + 1$ , 故  $f(a) = f(1) = 1^3 + 2 \times 1 + 1 = 4$ , 故 A 正确.

**21. C** 【解析】因为  $g(x)$  是奇函数,

所以其图象关于原点对称, 故  $f(x)$  的图象关于  $(0, 2)$  对称, 其最值点  $(3, f(3))$  和  $(-3, f(-3))$  也关于  $(0, 2)$  对称, 所以  $f(3) + f(-3) = 4$ , 故 C 正确.

**22. A** 【解析】 $\because$  函数  $g(x), h(x)$  是  $\mathbf{R}$  上的奇函数,  $\therefore t(x) = f(x) - 1 = 2g(x) - 3h(x)$  也是  $\mathbf{R}$  上的奇函数,  $\therefore t(x) + t(-x) = 0$ ,  $\therefore$  函数  $f(x) = 2g(x) - 3h(x) + 1$  在  $(0, +\infty)$  上有最大值为 7,  $\therefore t(x) = f(x) - 1$  在  $(0, +\infty)$  上有最大值为 6, 在  $(-\infty, 0)$  上有最小值为 -6,  $\therefore f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上有最小值 -5, 故 A 正确.

**23.  $2\sqrt{3}$**  【解析】由题意, 设  $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ , 则在  $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$  中,  $g(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+1} = -\frac{x}{x^2+1} = -g(x)$ , 函数是奇函数,  $g(x)_{\min} + g(x)_{\max} = 0$ ,  $g(-2023) + g(2023) = 0$ , 在  $f(x) = \frac{x}{x^2+1} + \sqrt{3}$  中, 当  $x \in [-2023, 2023]$  时,  $f(x)$  的最大值为  $M$ , 最小值为  $N$ ,  $M + N = f(x)_{\min} + f(x)_{\max} = \left(\frac{x}{x^2+1} + \sqrt{3}\right)_{\min} + \left(\frac{x}{x^2+1} + \sqrt{3}\right)_{\max} = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)_{\min} + \left(\frac{x}{x^2+1}\right)_{\max} + 2\sqrt{3} = g(x)_{\min} + g(x)_{\max} + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ .

## 4.2 简单幂函数的图象和性质

### 基础满分

**1. C** 【解析】由于幂函数的一般表达式为  $y = x^\alpha (\alpha \text{ 是常数})$ , 所以对比可知题目中的 ①  $y = x^3$  和 ⑤  $y = x$  是幂函数, 共两个, 故 C 正确.

**2. C** 【解析】因为幂函数的定义域为  $\mathbf{R}$ , 所以  $-m^2 + 2m > 0$ , 解得  $0 < m < 2$ , 又  $m \in \mathbf{Z}$ , 所以  $m = 1$ . 检验:  $m = 1$  时,  $-m^2 + 2m = 1$ , 即

$f(x) = x$ , 满足题意. 故 C 正确.

**规律总结** 幂函数解析式的特点: (1) 解析式是单项式; (2) 幂指数为常数, 底数为自变量,  $x^\alpha$  的系数为 1.

**3. A** 【解析】由幂函数定义可得  $k = 1$ , 将点  $(4, 2)$  代入可得  $2 = 4^\alpha$ , 解得  $\alpha = \frac{1}{2}$ , 所以  $k + \alpha = \frac{3}{2}$ , 故 A 正确.

**4. D** 【解析】设  $f(x) = x^\alpha$ ,  $\therefore f(4) = 2$ ,  $\therefore 4^\alpha = 2$ , 解得  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\therefore f(x) = \sqrt{x}$ .  $\therefore f(a) = 2f(a-3)$ ,  $\therefore \sqrt{a} = 2\sqrt{a-3}$ , 解得  $a = 4$ , 故 D 正确.

**5. D** 【解析】设幂函数  $f(x) = x^\alpha$ , 因为图象经过点  $\left(2, \frac{1}{4}\right)$ , 所以  $2^\alpha = \frac{1}{4}$ , 解得  $\alpha = -2$ , 则此幂函数的表达式为  $f(x) = x^{-2}$ . 幂函数  $f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ , 函数定义域为  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ , 在  $(0, +\infty)$  上单调递减;  $f(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = f(x)$ , 函数为偶函数, 图象关于  $y$  轴对称, 故 D 正确.

**6. D** 【解析】依题意, 知  $A(1, 1)$ , 则  $m+n=1$ , 因此  $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = (m+n) \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) = 2 + \frac{n}{m} + \frac{m}{n} \geq 2 +$

$2\sqrt{\frac{n}{m} \cdot \frac{m}{n}} = 4$ , 当且仅当  $m = n = \frac{1}{2}$  时取等号, 所以当  $m = n = \frac{1}{2}$  时,  $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$  取得最小值 4, 故 D 正确.

**7. C** 【解析】因为  $f(x)$  为幂函数, 所以  $m^2 + m - 1 = 1$ , 即  $m^2 + m - 2 = (m+2)(m-1) = 0$ , 解得  $m = -2$  或  $m = 1$ , 则  $f(x) = x^{-2}$  或  $f(x) = x$ .

又因为  $f(x)$  的图象与坐标轴没有公共点, 所以  $m < 0$ , 即  $f(x) = x^{-2}$ , 则  $f(2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$ , 故 C 正确.

### 易错警示 忽视幂函数的图象

#### 特点而致错

对于幂函数, 若其图象过原点 (与坐标轴有公共点), 则指数大于 0; 若其图象不过原点 (与坐标轴没有公共点), 则指数小于或等于 0.

**8. AC** 【解析】当  $\alpha = 1$  时,  $y = x$  为奇函数, 值域为  $\mathbf{R}$ , 故 A 正确;

当  $\alpha = -1$  时,  $y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ , 为奇函数, 但值域为  $\{x | x \neq 0\}$ , 故 B 错误;

当  $\alpha = 3$  时,  $y = x^3$  为奇函数, 值域为  $\mathbf{R}$ , 故 C 正确;

当  $\alpha = 2$  时,  $y = x^2$  为偶函数, 值域为  $\{x | x \geq 0\}$ , 故 D 错误.

### 易错警示 误判幂函数的奇偶性而致错

#### 性而致错

考虑幂函数的奇偶性, 要考虑指数的特点, 从而确定参数.

**9. AC** 【解析】由幂函数  $f(x) = (m^2 - 3m - 3)x^m$  在区间  $(0, +\infty)$  上单调递增, 得  $\begin{cases} m > 0, \\ m^2 - 3m - 3 = 1, \end{cases}$  解得  $m = 4$ , 故 A 正确; 函数  $f(x) = x^4$ , 函数  $f(x)$  在定义域  $\mathbf{R}$  上不单调, 是偶函数, 不是奇函数, 故 BD 错误, C 正确.

**10. AB** 【解析】由幂函数定义知  $m = 1$ , 将  $\left(3, \frac{1}{9}\right)$  代入解析式得  $\alpha = -2$ , 故 A 正确; 函数  $f(x)$  的定义域为  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ , 且对定义域内的任意  $x$  满足  $f(x) = x^{-2} = f(-x)$ , 故  $f(x)$  是偶函数, 故 B 正确;  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递增, 在

$(0, +\infty)$  上单调递减, 故 C 错误;

$f(x) = \frac{1}{x^2}$  的值不可能取到 0, 故 D 错误.

**11. D** 【解析】因为函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调, 由  $y = x^2 - 2ax + a + 2$  在  $(-\infty, 1]$  上不可能单调递增, 则函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上不可能单调递增, 故  $y = f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递减,

$$\text{所以 } \begin{cases} 1 \leq a, \\ 2a - 6 < 0, \\ 1 - 2a + a + 2 \geq 1^{2a-6}, \end{cases} \quad \text{解得 } 1 \leq a \leq 2,$$

所以  $a$  的取值范围是  $[1, 2]$ . 故 D 正确.

**12. ②** 【解析】①  $f(x) = x^{-1}$  只满足值域是  $\{y | y \in \mathbf{R}, \text{ 且 } y \neq 0\}$ ;

③  $f(x) = x^3$  只满足在  $(-\infty, 0)$  上单调递增;

④  $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$  只满足在  $(-\infty, 0)$  上单调递增;

②  $f(x) = x^{-2}$  是偶函数, 在  $(-\infty, 0)$  上单调递增, 但其值域是  $\{y | y > 0\}$ . 故②符合题意.

### 7.4 重难点上分

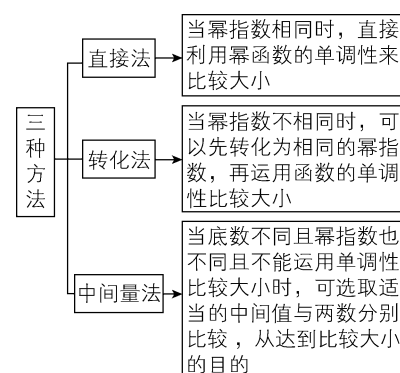
**1. C** 【解析】因为函数  $f(x) = x^3$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 所以由  $x > y$ , 得  $x + 1 > y + 1$ , 可得  $(x + 1)^3 > (y + 1)^3$ ; 由  $(x + 1)^3 > (y + 1)^3$ , 可得  $x + 1 > y + 1$ , 即  $x > y$ . 则“ $x > y$ ”是“ $(x + 1)^3 > (y + 1)^3$ ”的充要条件, 故 C 正确.

**2. A** 【解析】因为幂函数  $y = x^{0.5}$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增,  $c = 1 = 1^{0.5}$ , 且  $0.99 < 1 < 1.01$ , 所以  $b > c > a$ , 故 A 正确.

**3. A** 【解析】由题意,  $a = 2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}$ ,  $b = 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$ ,  $c = 25^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{25}$ .  $\because 9 < 16 < 25$ ,  $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$  单调递增,  $\therefore \sqrt[3]{9} < \sqrt[3]{16} < \sqrt[3]{25}$ , 即  $b < a < c$ . 故 A 正确.

### 规律总结 幂值大小比较的常

#### 用方法



**4. 【解】**(1) 因为  $f(x)$  是幂函数, 所以  $3m^2 - m + 1 = 1$ , 解得  $m = 0$  或  $m = \frac{1}{3}$ .

当  $m = 0$  时,  $f(x) = x^{-2}$ , 其图象不经过原点, 符合题意;

当  $m = \frac{1}{3}$  时,  $f(x) = x$ , 其图象经过原点, 不符合题意. 所以  $m = 0$ .

(2) 由 (1) 得  $f(x) = x^{-2}$ , 则  $f(x)$  是偶函数且在  $(0, +\infty)$  上单调递减.

当  $a > 0$  时, 由  $a^2 + 1 - a = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ , 可得  $a^2 + 1 > a > 0$ . 因为  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上为减函数, 所以  $f(a^2 + 1) < f(a)$ .

当  $a < 0$  时,  $-a > 0$ , 由  $a^2 + 1 - (-a) = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ , 可得  $a^2 + 1 > -a > 0$ . 因为  $f(-a) = (-a)^{-2} = a^{-2} = f(a)$ , 且  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上为减函数, 所以  $f(a^2 + 1) < f(-a) = f(a)$ . 综上,  $f(a^2 + 1) < f(a)$ .

**5.  $\left[-1, \frac{2}{3}\right]$**  【解析】幂函数  $y = x^{\frac{1}{2}}$  在  $[0, +\infty)$  上是增函数.  $\therefore (m + 1)^{\frac{1}{2}} < (3 - 2m)^{\frac{1}{2}}$ ,  $\therefore 0 \leq m + 1 < 3 - 2m$ , 解得  $-1 \leq m < \frac{2}{3}$ , 则实数  $m$  的取值范围为  $\left[-1, \frac{2}{3}\right)$ .

**6.  $(-1, 1)$**  【解析】 $\because$  幂函数  $f(x)$  的图象过点  $(-4, 2)$ ,  $\therefore f(x)$  为偶

函数,在第一象限过(4,2).当 $x \geq 0$ ,设 $f(x) = x^\alpha$ ,则 $4^\alpha = 2$ ,解得 $\alpha = \frac{1}{2}$ , $\therefore$ 幂函数 $f(x) = x^{\frac{1}{2}} (x \in \mathbf{R})$ .

$\therefore \frac{2}{4} > 0$ , $\therefore f(x) = x^{\frac{2}{4}} (x \in \mathbf{R})$

在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,不等式 $f(2-a) > f(2a-1) \Leftrightarrow f(|2-a|) > f(|2a-1|) \Leftrightarrow |2-a| > |2a-1|$ ,平方得 $4-4a+a^2 > 4a^2-4a+1$ ,解得 $-1 < a < 1$ , $\therefore$ 实数 $a$ 的取值范围是 $(-1, 1)$ .

### 7. $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$ 【解析】幂

函数 $y = x^{m^2-2m-3} (m \in \mathbf{N}^*)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,故 $m^2-2m-3 < 0$ ,解得 $-1 < m < 3$ .又 $m \in \mathbf{N}_+$ ,故 $m = 0, 1, 2$ .

当 $m = 0$ 时, $y = x^{-3}$ ,其图象不关于 $y$ 轴对称,舍去;

当 $m = 1$ 时, $y = x^{-4}$ ,其图象关于 $y$ 轴对称,满足;

当 $m = 2$ 时, $y = x^{-3}$ ,其图象不关于 $y$ 轴对称,舍去.

故 $m = 1$ ,不等式化为 $(a+1)^{-1} < (3-2a)^{-1}$ ,结合函数 $y = x^{-1}$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递减,所以 $a+1 > 3-2a > 0$ 或 $0 > a+1 > 3-2a$ 或 $a+1 < 0 < 3-2a$ ,解得 $a < -1$ 或 $\frac{2}{3} < a < \frac{3}{2}$ ,所以 $a$ 的取值范围为

$(-\infty, -1) \cup \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$ .

### 易错警示 忽略幂函数图象不连续情况致错

幂函数 $y = x^{-1}$ 的图象不连续,在两段区间上分别单调递减,此时由 $(a+1)^{-1} < (3-2a)^{-1}$ 进行等价转化时,要考虑自变量都大于0、都小于0或者一正一负三种情况,不要漏解.

8. 【解】(1)由幂函数 $f(x) = x^{4m-m^2}$ 在

$(0, +\infty)$ 上单调递增知 $4m-m^2 > 0 \Rightarrow 0 < m < 4$ ,又 $m \in \mathbf{Z}$ ,故 $m = 1, 2, 3$ .

当 $m = 1$ 或 $m = 3$ 时, $f(x) = x^3$ 为奇函数,图象关于原点对称,不符合题意;

当 $m = 2$ 时, $f(x) = x^4$ 为偶函数,图象关于 $y$ 轴对称,符合题意.

综上, $m = 2$ 且 $f(x) = x^4$ .

(2)由偶函数 $f(x) = x^4$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减.由 $f(a+2) < f(1-2a)$ ,得 $|a+2| < |1-2a| \Rightarrow a^2+4a+4 < 4a^2-4a+1$ ,所以 $3a^2-8a-3 = (3a+1) \cdot$

$(a-3) > 0$ .解得 $a < -\frac{1}{3}$ 或 $a > 3$ ,所以实数 $a$ 的取值范围是 $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup (3, +\infty)$ .

### 9. BD 【解析】 $f(x) = \frac{2x+1}{x+1} =$

$\frac{2(x+1)-1}{x+1} = 2 + \frac{-1}{x+1}$ ,所以 $f(x)$ 的

图象可由反比例函数 $y = -\frac{1}{x}$ 向左

平移1个单位,再向上平移2个单位得到.

$y = -\frac{1}{x}$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ,它在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上是增函数,值域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ,直线 $y = x$ 和 $y = -x$ 都是它的图象的对称轴.关于原点对称,经过平移可知 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 和 $(-1, +\infty)$ 上是增函数,在定义域内不是增函数,值域是 $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ ,直线 $y = x+3$ 和 $y = -x+1$ 都是它的图象的对称轴,且图象关于点 $(-1, 2)$ 对称,故BD正确.

10. 【解】(1)因为 $f(x)$ 是幂函数,所以 $m^2-3=1$ ,即 $m^2=4$ ,解得 $m=2$ 或 $m=-2$ .当 $m=2$ 时, $f(x)=$

$x^{1-2} = \frac{1}{x}$ ,此时 $f(2) < f(1)$ ,则 $m=$

2不符合题意;

当 $m=-2$ 时, $f(x) = x^3$ ,此时 $f(2) > f(1)$ ,则 $m=-2$ 符合题意.综上, $m=-2$ .

(2)由(1)可得 $f(x) = x^3$ ,则 $g(x) = x^3 + x^2 - 1$ .因为 $y = x^3$ 与 $y = x^2 - 1$ 在 $[1, 2]$ 上都是增函数,所以 $g(x)$ 在 $[1, 2]$ 上是增函数.因为 $g(1) = 1$ , $g(2) = 11$ ,所以 $g(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的值域为 $[1, 11]$ .

## S4 考点训练

1. C 【解析】函数 $y = 1-x^2$ 为偶函数,在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增,函数 $y = \frac{1}{2x}$ 为奇函数,故A错误;函数

$y = -\frac{1}{|x|}$ 为偶函数,在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减,故B错误;函数 $y = -|x|$ 为偶函数,在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增,故C正确;函数 $y = x^3 - 1$ 为非奇非偶,故D错误.

2. B 【解析】因为函数 $f(x) = (m^2 - 2m - 2)x^{m-1}$ 是幂函数,且在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,所以 $\begin{cases} m^2 - 2m - 2 = 1, \\ m - 1 < 0, \end{cases}$ 解得 $m = -1$ ,则

$f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ ,故 $f(3) = \frac{1}{9}$ ,故B

正确.

3. B 【解析】因为函数 $f(x)$ 是奇函数,所以 $f(-2) = -f(2) = -(-2 \times 2^2 + 2) = 6$ ,故B正确.

4. B 【解析】 $\because$ 函数 $f(x)$ 是偶函数, $\therefore f(-x) = f(x)$ , $\therefore ax^2 - (2+a)x + 1 = ax^2 + (2+a)x + 1$ ,化为 $(2+a)x = 0$ 对于任意实数 $x$ 恒成立, $\therefore 2+a=0$ ,解得 $a=-2$ . $\therefore f(x) = -2x^2 + 1$ ,其单调递增区间为 $(-\infty, 0]$ ,故B正确.



**5. A** 【解析】因为函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 则  $f(0)=0$ ,  
 当  $x>0$  时,  $f(x)=x^2-3x-4=(x+1) \cdot (x-4)$ ;  
 当  $x<0$  时,  $-x>0$ , 则  $f(x)=-f(-x)=-[(-x)^2-3(-x)-4]=-x^2-3x+4=-(x-1)(x+4)$ ;  
 当  $x-1>0$  时, 即当  $x>1$  时, 则  $xf(x-1)=x^2(x-5)>0$ , 解得  $x>5$ , 此时,  $x>5$ ;  
 当  $x-1<0$  时, 即当  $x<1$  时, 则  $xf(x-1)=-x(x-2)(x+3)>0$ , 可得  $x(x-2)(x+3)<0$ , 解得  $x<-3$  或  $0<x<2$ , 此时,  $x<-3$  或  $0<x<1$ .  
 综上所述, 不等式  $xf(x-1)>0$  的解集为  $(-\infty, -3) \cup (0, 1) \cup (5, +\infty)$ , 故 A 正确.

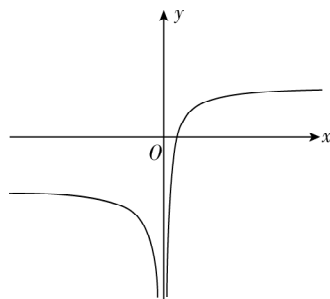
**6. C** 【解析】 $\because$  定义域为  $\mathbf{R}$  的函数  $f(x)$  满足  $f(3-x)=f(3+x)$ ,  
 $\therefore f(x)$  的图象关于直线  $x=3$  对称. 又当  $x_2>x_1>3$  时,  
 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$  恒成立,  $\therefore f(x)$  在区间  $(3, +\infty)$  上单调递增.  $b=f\left(\frac{5}{2}\right)=f\left(3-\frac{1}{2}\right)=f\left(3+\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{7}{2}\right)$ ,  $2x^2-x+5=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{39}{8}\geq\frac{39}{8}$ ,  $x^2+4\geq 4$ ,  $2x^2-x+5-(x^2+4)=x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ ,  $\therefore 2x^2-x+5>x^2+4\geq 4>\frac{7}{2}$ ,  $\therefore a>c>b$ . 故 C 正确.

**7. C** 【解析】因为  $\frac{1}{2}>0$ , 所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增. 又因为  $0<a<b<1$ , 所以  $\frac{1}{a^2}>\frac{1}{b^2}>1>b^2>a^2>0$ , 所以  $f\left(\frac{1}{a^2}\right)>f\left(\frac{1}{b^2}\right)>f(b^2)>f(a^2)$ . 故 C 正确.

**8. D** 【解析】函数  $f(x)=\frac{2x-1}{|x|}$ , 定义域为  $\{x|x\neq 0\}$ , 可得  $f(-x)=\frac{-2x-1}{|-x|}$ , 则  $f(-x)\neq f(x)$ , 且  $f(-x)\neq -f(x)$ , 即  $f(x)$  不是奇函数, 也不是偶函数, 故 AC 错误;  
 将  $y=\frac{2x-1}{|x|}$  中的  $y$  换为  $-y$ ,  $x$  不变, 可得  $-y=\frac{2x-1}{|x|}$ , 即  $y=\frac{1-2x}{|x|}$ , 与原函数不一样, 故 B 错误;

$$\text{又 } f(x)=\begin{cases} 2-\frac{1}{x}, & x>0, \\ -2+\frac{1}{x}, & x<0, \end{cases} \quad \text{大致图象}$$

如图:



可得  $f(x)$  的图象无对称关系, 故 D 正确.

**9. A** 【解析】令  $g(x)=f(x)-1=\sqrt[3]{x}+x$ , 因为  $g(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 且  $g(-x)=\sqrt[3]{-x}+(-x)=-\sqrt[3]{x}-x=-g(x)$ , 所以  $g(x)$  是  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 其图象关于原点对称. 又幂函数  $y=\sqrt[3]{x}$ ,  $y=x$  都是  $\mathbf{R}$  上的增函数, 所以  $g(x)$  是  $\mathbf{R}$  上的增函数. 而  $f(1-m)+f(2m)>2\Leftrightarrow f(1-m)-1>-[f(2m)-1]\Leftrightarrow g(1-m)>-g(2m)=g(-2m)$ , 所以  $1-m>-2m$ , 解得  $m>-1$ , 所以  $m$  的取值范围是  $(-1, +\infty)$ , 故 A 正确.

**10. BCD** 【解析】对于幂函数  $y=x^\alpha$ , 当  $x>0$  时, 无论  $\alpha$  是正、是负还是 0,  $y$  一定大于 0, 即幂函数图象不经过第四象限, 故 A 正确;

因为当  $x=0$  时,  $x^0$  无意义, 即  $y=x^0$  在  $x=0$  无定义, 故 B 错误;

函数  $y=\frac{1}{x}$  的定义域为  $\{x|x>2\}$ ,

则它的值域为  $\left\{y\left|0<y<\frac{1}{2}\right.\right\}$ , 不是

$\left\{y\left|y<\frac{1}{2}\right.\right\}$ , 故 C 错误;

当定义域是  $\{x|0\leq x\leq 2\}$  时,  $y=x^2$  的值域也是  $\{y|0\leq y\leq 4\}$ , 故 D 错误.

**规律总结** 幂函数的图象一定经过第一象限, 也可能是经过第一、二象限或第一、三象限, 但是不会经过第四象限.

**11. BCD** 【解析】函数  $f(x)=x^\alpha$  的图象经过点  $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ ,  $\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha=2$ , 解得  $\alpha=-1$ ,  $\therefore$  函数  $f(x)=x^{-1}$ . 由  $f(2)=\frac{1}{2}$ , 知 A 错误;  
 函数  $f(x)=x^{-1}$  为奇函数, 它的图象关于原点对称, 故 B 正确;  
 若  $x\in[1, 2]$ , 函数  $f(x)=x^{-1}$  在  $[1, 2]$  上单调递减, 则  $f(2)\leq f(x)\leq f(1)$ , 即  $f(x)\in\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ , 故 C 正确;  
 当  $x>0$  时,  $x^{-1}-(2-x)=\frac{1-2x+x^2}{x}=\frac{(1-x)^2}{x}\geq 0$ ,  $\therefore f(x)\geq 2-x$  恒成立, 故 D 正确.

**12.  $-x$  (答案不唯一).** 【解析】因为函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 且  $f(x)$  的图象是一条连续不断的曲线, 满足 ①  $\forall m, n\in\mathbf{R}, f(m+n)=f(m)+f(n)$ ; ②  $f(x)$  为奇函数; ③  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递减, 则符合题意的  $f(x)=-x$ .

**13.  $(-\infty, 4)$**  【解析】幂函数  $f(x)=(m^2+4m+4)x^{m+2}$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减, 则  $\begin{cases} m^2+4m+4=1, \\ m+2<0, \end{cases}$

解得  $m = -3$ . 不等式  $(2a-1)^{-m} < (a+3)^{-m}$  即  $(2a-1)^3 < (a+3)^3$ , 又函数  $y = x^3$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 因此  $2a-1 < a+3$ , 解得  $a < 4$ , 所以  $a$  的取值范围为  $(-\infty, 4)$ .

**14. 【解】**(1) 因为幂函数  $f(x) = x^a$  的图象过点  $(2, 4)$ , 所以  $4 = 2^a$ , 解得  $a = 2$ , 所以函数  $f(x) = x^2$ .

(2)  $h(x) = 2f(x) - kx - 1 = 2x^2 - kx - 1$ , 其图象对称轴为直线  $x = -\frac{-k}{4} = \frac{k}{4}$ .

因为  $h(x)$  在  $[-1, 1]$  上单调,

所以  $\frac{k}{4} \leq -1$  或  $\frac{k}{4} \geq 1$ , 解得  $k \leq -4$  或  $k \geq 4$ , 所以实数  $k$  的取值范围为  $(-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$ .

**15. 【解】**(1) 由题意得  $m^2 + m - 5 = 1$ , 解得  $m = 2$  或  $m = -3$ , 故  $f(x) = x^4$  或  $f(x) = \frac{1}{x}$ . 又幂函数  $f(x) = (m^2 + m - 5)x^{m+2}$  的图象不过原点, 故  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

(2) 当  $x > 0$  时,  $g(x) = 2f(x) + \frac{1}{f(x)} = \frac{2}{x} + x$ .  $\forall x < 0$ , 则  $-x > 0$ ,  $g(-x) = -\frac{2}{x} - x$ . 又因为  $g(x)$  是偶函数, 所以  $g(x) = g(-x) = -\frac{2}{x} - x$ .

综上,  $g(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} + x, & x > 0, \\ -\frac{2}{x} - x, & x < 0. \end{cases}$

**16. 【解】**(1)  $\because$  幂函数  $f(x) = x^{(3-k)k}$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ) 在  $(0, +\infty)$  上单调递增,  $\therefore k(3-k) > 0$ , 解得  $0 < k < 3$ .  $\therefore k \in \mathbf{Z}$ ,  $\therefore k = 1$  或  $k = 2$ .

当  $k = 1$  或  $k = 2$  时,  $f(x) = x^2$  满足题意,  $\therefore f(x) = x^2$ .

(2)  $\because f(x) = x^2$ ,  $\therefore g(x) = mx^2 + mx + 1$ .

当  $m = 0$  时,  $g(x) = 1$  不合题意;  
当  $m \neq 0$  时, 函数  $g(x)$  图象的对称轴为直线  $x = -\frac{1}{2}$ ,  $\therefore$  函数  $g(x)$  在  $[0, 1]$  上单调.

$\therefore \begin{cases} m < 0, \\ g(0) = 5 \end{cases}$  或  $\begin{cases} m > 0, \\ g(1) = 5, \end{cases}$   
解得  $m = 2$ .

**17. 【解】**(1) 由题意得  $3m^2 - 2m = 1$ , 解得  $m = -\frac{1}{3}$  或  $m = 1$ .

当  $m = 1$  时,  $f(x) = x$ , 函数  $f(x) = x$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 不合题意;

当  $m = -\frac{1}{3}$  时,  $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$ , 函数  $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$  的定义域为  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ , 函数  $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递减, 在  $(0, +\infty)$  上单调递减, 但  $f(-1) = -1$ ,  $f(1) = 1$ , 所以函数  $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$  在定义域  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  上不单调, 符合题意. 所以  $m = -\frac{1}{3}$ ,  $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$ .

(2) 因为函数  $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$  的定义域为  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ , 关于原点对称, 且  $f(-x) = (-x)^{-\frac{1}{3}} = -x^{-\frac{1}{3}} = -f(x)$ , 所以  $f(x)$  为奇函数. 因为  $f(a+1) + f(2a-3) < 0$ , 所以  $f(a+1) < -f(2a-3) = f(3-2a)$ , 即  $(a+1)^{-\frac{1}{3}} < (3-2a)^{-\frac{1}{3}}$ .

又  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递减且恒负, 在  $(0, +\infty)$  上单调递减且恒正,

所以  $\begin{cases} a+1 > 0, \\ 3-2a > 0, \end{cases}$  或  $\begin{cases} a+1 < 0, \\ 3-2a < 0, \end{cases}$  或  $\begin{cases} a+1 > 3-2a \\ a+1 > 3-2a \end{cases}$   
 $\begin{cases} a+1 < 0, \\ 3-2a > 0. \end{cases}$  解得  $a < -1$  或  $\frac{2}{3} < a < \frac{3}{2}$ , 所以实数  $a$  的取值范围是

$$(-\infty, -1) \cup \left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right).$$

## 985 冲刺专题五 函数性质的综合应用

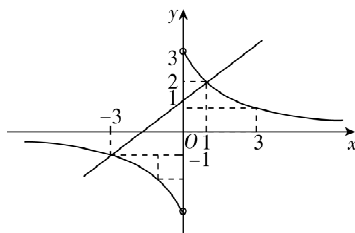
**1. B 【解析】**依题意,  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数, 所以  $f(-3) = f(3)$ ,  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递减, 故  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 又  $1 < 3 < \pi$ , 所以  $f(1) < f(-3) < f(\pi)$ , 故 B 正确.

**2. D 【解析】** $\because f(x) = -x|x| + 2x$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 且  $f(-x) + f(x) = x|x| - 2x - x|x| + 2x = 0$ ,  $\therefore f(x)$  为奇函数, 故 AB 错误;

$\because$  当  $x > 0$  时,  $f(x) = -x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1$ , 为开口向下的抛物线的一部分, 抛物线的对称轴方程为  $x = 1$ ,  $\therefore f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递减, 又  $\because f(x)$  为奇函数,  $\therefore f(x)$  在  $(-\infty, -1)$  上单调递减, 即奇函数  $f(x)$  在区间  $(-\infty, -1)$  和  $(1, +\infty)$  上单调递减, 故 C 错误, D 正确.

**3. C 【解析】**因为函数  $f(x)$  是定义在  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  上的奇函数, 根据奇函数的对称性可知, 函数  $f(x)$  的大致图象如图所示. 令

$$g(x) = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4},$$



因为  $f(1) = g(1) = 2$ ,  $f(-3) = g(-3) = -1$ , 结合函数图象可知, 满足不等式  $f(x) \geq \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$  的  $x$  的取值范围为  $(-\infty, -3] \cup (0, 1]$ , 故 C 正确.

**4. B 【解析】**因为函数  $f(x) = ax^2 + 2a$  是定义在  $[4a, a+5]$  上的偶函数, 所以  $4a + a + 5 = 0$ , 解得  $a = -1$ ,

则函数  $f(x) = -x^2 - 2$ , 其定义域为  $[-4, 4]$ , 在区间  $[0, 4]$  上单调递减. 又  $g(x) = f(x+1)$ , 则  $g\left(-\frac{3}{2}\right) = f\left(-\frac{3}{2}+1\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ ,  $g(0) = f(1)$ ,  $g(3) = f(4)$ , 则有  $g\left(-\frac{3}{2}\right) > g(0) > g(3)$ , 故 B 正确.

**5. C** 【解析】由当  $x > 0$  时,  $f(x) = x^2 - 2x - 8 = (x+2)(x-4)$ , 可知当  $0 < x < 4$  时,  $f(x) < 0$ ; 当  $x > 4$  时,  $f(x) > 0$ . 又因为  $f(x)$  为奇函数, 所以当  $-4 < x < 0$  时,  $f(x) > 0$ ; 当  $x < -4$  时,  $f(x) < 0$ . 由  $\sqrt[3]{x}f(x) < 0$ , 可得  $\begin{cases} x > 0, \\ f(x) < 0 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x < 0, \\ f(x) > 0 \end{cases}$ , 解得  $0 < x < 4$  或  $-4 < x < 0$ , 所以不等式  $\sqrt[3]{x}f(x) < 0$  的解集为  $(-4, 0) \cup (0, 4)$ , 故 C 正确.

**6. A** 【解析】 $\because f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数,  $\therefore$  不等式  $f(x-t) \geq \sqrt{2}f(x)$  恒成立等价于  $f(|x-t|) \geq \sqrt{2} \cdot f(|x|)$  恒成立.  $\because$  当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $\therefore$  不等式等价于  $\sqrt{|x-t|} \geq \sqrt{2|x|}$  恒成立, 即  $|x-t| \geq 2|x|$  在  $[0, t-1]$  上恒成立, 平方得  $x^2 - 2tx + t^2 \geq 4x^2$ , 即  $3x^2 + 2tx - t^2 \leq 0$  在  $[0, t-1]$  上恒成立. 设  $g(x) = 3x^2 + 2tx - t^2$ , 则满足  $\begin{cases} g(0) \leq 0, \\ g(t-1) \leq 0, \\ t-1 > 0, \end{cases}$  即  $\begin{cases} -t^2 \leq 0, \\ 3(t-1)^2 + 2t(t-1) - t^2 \leq 0, \\ t-1 > 0, \end{cases}$  解得  $1 < t \leq \frac{3}{2}$ ,  $\therefore$  实数  $t$  的最大值是  $\frac{3}{2}$ . 故 A 正确.

**7. BD** 【解析】由于  $y = f(x)$  的图象关于点  $P(a, b)$  成中心对称图形的

充要条件是  $y = f(x+a) - b$  为奇函数, 对于 A, 因为  $f(x+a) - b = k(x+a) + m - b = kx + ka + m - b$ , 若  $y = f(x+a) - b$  为奇函数, 则  $-kx - ka + m - b = -kx + ka + m - b$ , 所以  $ka + m - b = 0$ , 解得  $a = 0, b = m$ , 故  $f(x) = kx + m$  的图象关于点  $(0, m)$  对称, 故错误; 对于 B 因为  $f(x-1) - 2 = \frac{2(x-1)+1}{x-1+1} - 2 = \frac{2x-1}{x} - 2 = -\frac{1}{x}$ , 所以  $f(x-1) + 2$  为奇函数, 所以点  $(-1, 2)$  为  $f(x)$  图象的对称中心, 故正确; 对于 C, 设  $f(x) = x^3 - 2x^2$  图象的对称中心为  $(a, b)$ , 则  $f(x+a) - b = -f(-x+a) + b$ , 即  $(x+a)^3 - 2(x+a)^2 - b = -(-x+a)^3 + 2(-x+a)^2 + b$ , 所以  $(3a-2)x^2 + a^3 - 2a^2 - b = 0$ , 即  $3a-2=0$ , 所以  $a = \frac{2}{3}$ , 故函数  $f(x) = x^3 - 2x^2$  图象的对称中心的横坐标为  $\frac{2}{3}$ , 故错误; 对于 D, 因为定义在  $[-3, 3]$  的函数  $f(x)$  的图象关于点  $(0, -1)$  成中心对称, 所以  $y = f(x) + 1$  为奇函数, 设  $g(x) = f(x) + 1$ , 则  $g(x) = -g(-x) = -f(-x) - 1$ , 即  $g(-x) = f(-x) + 1$ , 当  $0 < x \leq 3$  时,  $f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$ , 所以  $f(x) \in [-4, 0]$ ,  $f(x) + 1 \in [-3, 1]$ , 则  $g(-x) \in [-1, 3]$ , 所以  $f(-x) \in [-2, 2]$ , 所以  $f(x) \in [-4, 2]$ , 故正确.

**8. 【解】**(1) 因为函数  $f(x)$  是定义在  $[-4, 4]$  上的奇函数, 所以  $f(1) = -f(-1) = 2$ . 又因为当  $0 < x \leq 4$  时,  $f(x) = x^2 - ax$ , 所以  $1 - a = 2$ , 解得  $a = -1$ . (2) 由(1)知当  $0 < x \leq 4$  时,  $f(x) = x^2 + x$ . 当  $-4 \leq x < 0$  时,  $0 < -x \leq 4$ ,  $f(-x) = (-x)^2 - x = x^2 - x$ , 由  $f(x)$  为奇函数, 得  $f(-x) = -f(x)$ ,

所以  $f(x) = -f(-x) = -x^2 + x$ ,  $-4 \leq x < 0$ , 又  $f(0) = 0$ , 所以  $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & 0 \leq x \leq 4, \\ -x^2 + x, & -4 \leq x < 0. \end{cases}$  (3)  $f(m-1) + f(2m+1) \geq 0 \Rightarrow f(m-1) \geq -f(2m+1) \Rightarrow f(m-1) \geq f(-2m-1)$ , 由(2)中的函数解析式可知, 当  $0 \leq x \leq 4$  时,  $f(x) = x^2 + x$  单调递增, 当  $-4 \leq x < 0$  时  $f(x) = -x^2 + x$  单调递增, 所以  $f(x)$  在  $[-4, 4]$  上单调递增, 所以  $-4 \leq -2m-1 \leq m-1 \leq 4$ , 解得  $0 \leq m \leq \frac{3}{2}$ , 即不等式的解集是  $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ .

### 易错警示 解不等式时一定要

#### 注意函数的定义域

解与函数的相关不等式时, 一定要注意函数本身的定义域, 求解方法就是  $f$  不变, 则  $( )$  对应的范围不变.

**9. 【解】**(1) 当  $x < 0$  时,  $-x > 0$ ,  $f(x) = f(-x) = (-x)^2 + 2 \cdot (-x) - 3 = x^2 - 2x - 3$ , 所以  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x \geq 0, \\ x^2 - 2x - 3, & x < 0. \end{cases}$  (2) 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$ , 因此当  $x \geq 0$  时, 函数  $f(x)$  单调递增. 因为  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数, 且当  $x \geq 0$  时, 函数  $f(x)$  单调递增, 所以  $f(m+1) < f(2m-1)$  等价于  $f(|m+1|) < f(|2m-1|)$ , 所以  $|m+1| < |2m-1|$ . 因此  $(m+1)^2 < (2m-1)^2$ , 即  $m^2 - 2m > 0$ , 解得  $m > 2$  或  $m < 0$ , 所以实数  $m$  的取值范围是  $\{m \mid m < 0 \text{ 或 } m > 2\}$ .

**10. (1) 【解】** $f(x)$  为奇函数. 证明: 函数  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ , 其定义域为  $\mathbf{R}$ , 又函数  $f(-x) = \frac{-x}{x^2+1} = -f(x)$ , 故函数  $f(x)$  为奇函数.

(2) 【证明】设  $1 \leq x_1 < x_2$ ,

$$\begin{aligned} \text{则 } f(x_1) - f(x_2) &= \frac{x_1}{x_1^2+1} - \frac{x_2}{x_2^2+1} = \\ &= \frac{x_1(x_2^2+1) - x_2(x_1^2+1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)} = \frac{(x_1x_2-1)(x_2-x_1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}, \end{aligned}$$

又由  $1 \leq x_1 < x_2$ , 得  $x_2 - x_1 > 0, x_1x_2 - 1 > 0$ , 则  $f(x_1) - f(x_2) > 0$ ,

故函数  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上单调递减.

(3) 根据题意  $f(x)$  为奇函数且  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上单调递减, 则  $f(x)$  在  $(-\infty, -1]$  上单调递减.

11. 【解】(1)  $\because f(1) = \frac{a-1}{1+b} = 0, \therefore a =$

$$1, f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+b}, \text{ 又 } \because f\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$-f(x), \text{ 即 } \frac{1-x^2}{1+b x^2} = \frac{1-x^2}{x^2+b}, \therefore b = 1,$$

$$\therefore f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}, \text{ 其定义域为 } \mathbf{R}, \text{ 且}$$

满足  $f(-x) = f(x), \therefore$  函数  $f(x)$  为偶函数.

$$(2) \text{ 函数 } f(x) = 1 - \frac{2}{x^2+1} \text{ 在 } (0,$$

$+\infty)$  上单调递增.

证明: 令  $0 < x_1 < x_2$ , 则  $x_1 - x_2 < 0$ ,

$$\therefore f(x_1) - f(x_2) = \frac{2}{x_2^2+1} - \frac{2}{x_1^2+1} =$$

$$\frac{2(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)} < 0, \therefore f(x_1) <$$

$$f(x_2), \therefore f(x) = 1 - \frac{2}{x^2+1} \text{ 在 } (0,$$

$+\infty)$  上单调递增.

(3) 由 (1) (2) 知偶函数  $f(x) =$

$$1 - \frac{2}{x^2+1} \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增,}$$

$$\therefore f(3x-1) > f(x+2) \Leftrightarrow |3x-1| >$$

$$|x+2| \Leftrightarrow 8x^2 - 10x - 3 > 0,$$

$$\text{解得 } x > \frac{3}{2} \text{ 或 } x < -\frac{1}{4}. \therefore \text{ 原不等式}$$

$$\text{的解集为 } \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right).$$

### 985 冲刺专题六 函数图象的变换与判断

1. B 【解析】函数  $f(x) = \frac{x-2}{x-1} = \frac{-1}{x-1} +$

1 的图象是由函数  $y = \frac{-1}{x}$  的图象向右平移一个单位长度再向上平移一个单位长度得到的, 分析四个选项中的图象易得只有 B 中的图象符合要求.

2. B 【解析】函数  $f(x)$  的定义域为  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty), \therefore f(-x) =$

$$(-x)^2 - \frac{1}{|-x|} = x^2 - \frac{1}{|x|} = f(x), \therefore \text{ 函}$$

数  $f(x)$  为偶函数, 其图象关于  $y$  轴对称, 当  $x > 0$  时,  $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ , 单调递增, 故 B 正确.

3. A 【思路导引】根据函数解析式判断函数图象时, 可通过定义域、单调性、奇偶性、特殊点的函数值等角度进行判断和排除.

【解析】因为函数  $f(x)$  的定义域为  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ , 且

$f(-x) = -f(x)$ , 所以函数  $f(x)$  是奇函数, 故 C 错误;

当  $x \in (0, 1)$  时,  $f(x) > 0$ , 故 B 错误;

$$\text{当 } x \in (1, +\infty) \text{ 时, } f(x) = \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}}, \text{ 因}$$

为  $x^2-1$  的变化速度越来越快,  $\sqrt[3]{x}$  的变化速度越来越慢, 所以  $f(x) =$

$$\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}} \text{ 的变化速度越来越快, 故 D 错误.}$$

4. B 【解析】由函数  $f(x) =$

$$\frac{d}{ax^2+bx+c} (a, b, c, d \in \mathbf{R}) \text{ 的图象可}$$

得, 1 和 5 是方程  $ax^2+bx+c=0$  的

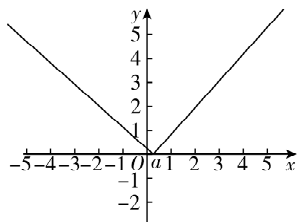
$$\text{两个根, 所以 } \begin{cases} 1+5 = -\frac{b}{a}, \\ 1 \times 5 = \frac{c}{a}, \end{cases} \text{ 即 } ac > 0,$$

且  $ab < 0$ , 故 A, C 错误;

$$\text{又 } f(0) = \frac{d}{c} < 0, \text{ 即 } cd < 0, \text{ 故 D 错误.}$$

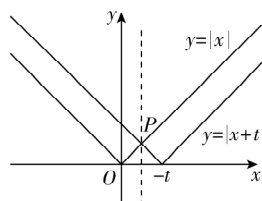
5. 2 【解析】根据题意, 将二次函数  $y = 3(x+1)^2 - 2$  的图象先向右平移 2 个单位长度, 再向上平移 4 个单位长度, 得到二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  的图象, 则有  $ax^2 + bx + c = 3(x+1-2)^2 - 2 + 4 = 3x^2 - 6x + 5$ , 必有  $a = 3, b = -6, c = 5$ , 故  $a+b+c = 2$ .

6.  $(-\infty, 1]$  【解析】 $f(x) = |x-a|$  的图象由函数  $y = |x|$  的图象向右平移  $a$  个单位长度得到, 结合  $f(x) = |x-a|$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 可得其大致图象如图所示:



可得实数  $a$  的取值范围是  $(-\infty, 1]$ .

7. -1 【解析】分别画  $y = |x|$  和  $y = |x+t|$  的图象, 如图.



根据  $f(x)$  的图象关于直线  $x = \frac{1}{2}$  对

称, 可以看出函数  $f(x) = \max\{|x|, |x+t|\}$  的图象为“V”字形, 从图象可以看出,  $y = |x+t|$  的图象过点  $(1, 0)$ , 即  $|1+t| = 0$ , 解得  $t = -1$ .

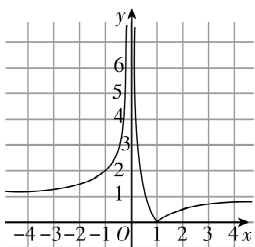
8. 【解】(1) 因为函数  $f(x) = \left|1 - \frac{1}{x}\right|$ ,

先作出函数  $y = 1 - \frac{1}{x}$  的图象, 然后

再利用图象变换作出函数  $f(x) =$

$\left|1 - \frac{1}{x}\right|$  的图象, 如图所示.





(2) 由  $\left|1 - \frac{1}{x}\right| = \frac{1}{3}$ , 解得  $x = \frac{3}{2}$  或  $x = \frac{3}{4}$ , 由  $\left|1 - \frac{1}{x}\right| = 3$ , 解得  $x = -\frac{1}{2}$  或  $x = \frac{1}{4}$ , 由上图可知, 当  $f(x) = \frac{1}{3}$  时,  $x > 0$ , 所以  $[a, b] = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ , 所以  $a+b = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ .

(3) 因为  $f(x)$  的定义域为  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ,  $f(x) \geq 0, f(x)$

在  $[a, b]$  上值域为  $[ma, mb]$  ( $m > 0$ ), 所以  $a > 0$ . 若  $[a, b]$  在  $f(x)$  的单调递增区间内, 又  $f(x) = \left|1 - \frac{1}{x}\right|$  在  $[1, +\infty)$  上单调递增, 所

$$\text{以 } \begin{cases} f(a) = ma, \\ f(b) = mb, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 1 - \frac{1}{a} = ma, \\ 1 - \frac{1}{b} = mb, \end{cases} \text{ 所以}$$

$a, b$  是方程  $1 - \frac{1}{x} = mx$ , 即  $x - 1 = mx^2$  的两个根.

又  $f(1) = 0$ , 所以  $a > 1$ , 所以  $mx^2 - x + 1 = 0$  在区间  $(1, +\infty)$  上有两个不相等的实数根.

设  $g(x) = mx^2 - x + 1$ , 则有

$$\begin{cases} \Delta = 1 - 4m > 0, \\ g(1) = m - 1 + 1 > 0, \\ \frac{1}{2m} > 1, \\ m > 0, \end{cases} \quad \text{解得 } 0 < m < \frac{1}{4},$$

故实数  $m$  的取值范围为  $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ .

若  $[a, b]$  在  $f(x)$  的单调递减区间内, 则  $[a, b] \subsetneq (0, 1)$ ,

$$\begin{cases} f(a) = mb, \\ f(b) = ma, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} \frac{1}{a} - 1 = mb, \\ \frac{1}{b} - 1 = ma, \end{cases} \quad \text{化简,}$$

得  $1 - a = 1 - b$ , 即  $a = b$ , 不符合题意. 综上, 实数  $m$  的取值范围

为  $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ .

## 第二章 综合检测

**1. C** 【解析】由题意得  $\begin{cases} 2x-1 \geq 0, \\ x^2 \neq 1, \end{cases}$  解得  $x \geq \frac{1}{2}$  且  $x \neq 1$ , 故  $f(x)$  的定义域为  $\left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)$ , 故 C 正确.

**2. B** 【解析】 $g(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ , 所以  $f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2}$  不为同一函数, 故 A 错误;

$f(x) = x^2, g(x) = \sqrt[3]{x^6}$  的定义域都为  $\mathbf{R}$ , 且  $g(x) = x^2$ , 故  $f(x) = x^2, g(x) = \sqrt[3]{x^6}$  为同一函数, 故 B 正确;

$f(x) = x+1$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 而  $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$  的定义域为  $\{x | x \neq 1\}$ , 所以  $f(x) = x+1, g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$  不

为同一函数, 故 C 错误;

$f(x) = x^0$  的定义域为  $\{x | x \neq 0\}$ , 而  $g(x) = 1$  的定义域为  $\mathbf{R}$  所以  $f(x) = x^0, g(x) = 1$  不为同一函数, 故 D 错误.

**3. A** 【解析】 $f(x)$  的定义域为  $\{x | x \neq \pm 1\}$ , 关于原点对称, 且  $f(-x) = \frac{-x}{|x|-1} = -f(x)$ , 故  $f(x)$  是奇函数, 故 BCD 错误; A 正确.

**4. C** 【解析】函数  $f(x)$  的定义域为  $[2, 8]$ , 则  $\begin{cases} 2 \leq x-2 \leq 8, \\ x-5 \neq 0, \end{cases}$  解得  $4 \leq x \leq 10$  且  $x \neq 5$ , 故函数  $y = \frac{f(x-2)}{x-5}$  的定义域为  $[4, 5) \cup (5, 10]$ , 故 C 正确.

**5. A** 【解析】因为  $f(x)$  是幂函数, 所以  $m^2 - 2m - 2 = 1$ , 解得  $m = -1$  或  $m = 3$ .

当  $m = -1$  时,  $m^2 - m - 3 = -1, f(x) = \frac{1}{x}$  的图象不经过坐标原点, 符合题意;

当  $m = 3$  时,  $m^2 - m - 3 = 3, f(x) = x^3$  的图象经过坐标原点, 不符合题意.

综上,  $m = -1$  符合题意, 故 A 正确.

**6. A** 【解析】因为二次函数  $y = x^2 +$

$(1-a)x+2$  的二次项系数为正数, 图象对称轴为直线  $x = -\frac{1-a}{2}$ , 且函数在区间  $(-\infty, 4]$  上单调递减, 所以  $-\frac{1-a}{2} \geq 4$ , 解得  $a \geq 9$ , 因此, 实数  $a$  的取值范围是  $[9, +\infty)$ , 故 A 正确.

**7. D** 【解析】因为函数  $f(x)$  为幂函数, 所以  $3m^2 - m - 1 = 1$ , 解得  $m = -\frac{2}{3}$  或  $m = 1$ .

当  $m = -\frac{2}{3}$  时, 可得  $f(x) = x^{-\frac{5}{3}}$ , 此时函数为奇函数, 符合题意;

当  $m = 1$  时, 可得  $f(x) = x^0$ , 此时函数为偶函数, 不符合题意, 舍去. 所以  $m = -\frac{2}{3}$ , 故 D 正确.

**8. D** 【解析】当  $x > 1$  时,  $f(x) = x-1 > 0$ , 又函数  $f(x) = \begin{cases} -2x^2+ax-2, & x \leq 1, \\ x-1, & x > 1 \end{cases}$  的值域为  $\mathbf{R}$ , 所

以当  $x \leq 1$  时,  $f(x) = -2x^2+ax-2$  的

最大值大于等于 0. 二次函数  $y = -2x^2 + ax - 2$  的图象开口向下, 对称轴为直线  $x = \frac{a}{4}$ .

当  $\frac{a}{4} > 1$ , 即  $a > 4$  时,  $f(1) = -4 + a \geq 0$ , 解得  $a \geq 4$ , 所以  $a > 4$ ;

当  $\frac{a}{4} \leq 1$ , 即  $a \leq 4$  时,  $f\left(\frac{a}{4}\right) = -\frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{4} - 2 \geq 0$ , 解得  $a \geq 4$  或  $a \leq -4$ , 所以  $a = 4$  或  $a \leq -4$ .

综上实数  $a$  的取值范围是  $(-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$ . 故 D 正确.

**9. AD** 【解析】因为幂函数  $y = x^\alpha$  的图象过点  $(2, 8)$ , 所以  $8 = 2^\alpha$ , 解得  $\alpha = 3$ , 所以  $y = x^3$ . 点  $(0, 0)$  满足  $y = x^3$ , 故 A 正确;  $(-x)^3 = -x^3$ , 所以  $y = x^3$  是奇函数, 故 B 错误;  $y = x^3$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 故 C 错误;  $y = x^3$  的值域为  $\mathbf{R}$ , 故 D 正确.

**10. ABD** 【解析】因为  $f(x)$  为偶函数, 所以  $2a - 1 + a = 0$ , 解得  $a = \frac{1}{3}$ , 故 A 正确;

由于  $f(x + 1) = x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2$ , 则  $f(x) = x^2 + 2$ , 故 B 正确;

$f(x) = 1 + \frac{2x}{x^2 + 1}$ , 令  $g(x) = f(x) - 1 = \frac{2x}{x^2 + 1}$ ,  $x \in [-2, 2]$ ,

则  $g(-x) = \frac{-2x}{x^2 + 1} = -g(x)$ , 则  $g(x)$

为奇函数, 所以  $g(x)_{\max} + g(x)_{\min} = 0$ , 即  $m - 1 + n - 1 = 0$ , 解得  $m + n = 2$ , 故 C 错误;

根据题意, 函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递减, 又  $a^2 - a + 1 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq$

$\frac{3}{4}$ , 则  $f\left(\frac{3}{4}\right) \geq f(a^2 - a + 1)$ , 故 D 正确.

**11. ABD** 【解析】依题意, 若函数

$f(x)$  存在“倍值区间”, 则  $f(x)$  在  $[m, n]$  上是单调函数, 若  $f(x)$

为增函数, 则有  $\begin{cases} f(m) = 3m, \\ f(n) = 3n, \end{cases}$

若  $f(x)$  为减函数, 则

有  $\begin{cases} f(m) = 3n, \\ f(n) = 3m. \end{cases}$

由此分析选项:

对于 A,  $f(x) = 2x^2$ , 在区间  $\left[0, \frac{3}{2}\right]$  上单调递增, 且值域为

$\left[0, \frac{9}{2}\right]$ , 则区间  $\left[0, \frac{3}{2}\right]$  是函数  $f(x)$  的“倍值区间”, 故正确;

对于 B,  $f(x) = \frac{1}{x}$  在区间  $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$  上单调递减, 且值域

为  $[1, 3]$ , 则区间  $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$  是函数  $f(x)$  的“倍值区间”, 故正确;

对于 C,  $f(x) = x + \frac{2}{x}$  在  $[-\sqrt{2}, 0)$ ,  $(0, \sqrt{2}]$  上单调递减, 在

$(-\infty, -\sqrt{2}), (\sqrt{2}, +\infty)$  上单调递增, 假设函数  $f(x)$  存在“倍值区间” $[m, n]$ , 若  $f(x)$  在  $[m, n]$  上单

调递增, 则  $\begin{cases} f(m) = 3m, \\ f(n) = 3n, \end{cases}$  即有

$\begin{cases} m + \frac{2}{m} = 3m, \\ n + \frac{2}{n} = 3n, \end{cases}$  而  $m < n \leq -\sqrt{2}$  或

$\sqrt{2} \leq m < n$ , 无解;

若  $f(x)$  在  $[m, n]$  上单调递减, 则

$\begin{cases} f(m) = 3n, \\ f(n) = 3m, \end{cases}$  即  $\begin{cases} m + \frac{2}{m} = 3n, \\ n + \frac{2}{n} = 3m, \end{cases}$  两式

相减得  $mn = \frac{1}{2}$ , 两式相加得  $mn =$

1, 矛盾, 故  $f(x)$  不存在“倍值区间”, 故错误;

对于 D, 当  $x > 0$  时,  $f(x) = \frac{7x}{x^2 + 2} =$

$\frac{7}{x + \frac{2}{x}}$ , 函数  $y = x + \frac{2}{x}$  在  $(0, \sqrt{2}]$  上

单调递减, 于是  $f(x)$  在  $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$  上

单调递增, 且值域为  $(0, \sqrt{3}]$ , 则

区间  $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$  是函数  $f(x)$  的“倍值区间”, 故正确.

**12. 8** 【解析】根据题意,  $f(x)$  是定义在  $[m - 5, 1 - 2m]$  上的偶函数, 则有  $m - 5 + (1 - 2m) = 0$ , 得  $m = -4$ ,  $\therefore$  定义域为  $[-9, 9]$ . 又  $\because$  当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = x^2 - 2x$ ,  $\therefore f(4) = 8$ . 又  $\because f(x)$  是偶函数,  $\therefore f(m) = f(-4) = f(4) = 8$ .

**13. ①③** 【解析】根据幂函数  $y = x^k$  的性质, 因为幂函数在区间  $(0, +\infty)$  上单调递增, 所以  $k > 0$ , 此时 ①②③ 满足题意. 又因为函数图象关于原点成中心对称, 所以该幂函数为奇函数, 根据奇函数的性质  $f(-x) = -f(x)$ . 又因为  $y = x^{\frac{1}{2}}$  的定义域为  $[0, +\infty)$ , 所以图象不关于原点成中心对称, 故 ②  $y = x^{\frac{1}{2}}$  不满足题意.

**14. -1** 【解析】 $\because f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} +$

$a = \frac{x^3 - 2x}{x^2 + 1} + a + 1$ ,  $f(x)$  是奇函数,

$\therefore f(x) + f(-x) = 0$ . 又  $\because f(-x) =$

$-\frac{x^3 - 2x}{x^2 + 1} + a + 1$ ,  $\therefore f(x) + f(-x) =$

$2a + 2$ ,  $\therefore 2a + 2 = 0$ , 解得  $a = -1$ .

**15. 【解】**(1) 由幂函数  $f(x) = (m^2 - 3m + 3)x^m$ , 可知  $m^2 - 3m + 3 = 1$ , 解得  $m = 1$  或  $m = 2$ .

当  $m = 1$  时,  $f(x) = x$  的图象不关于  $y$  轴对称, 舍去;

当  $m = 2$  时,  $f(x) = x^2$  的图象关于

$y$  轴对称, 满足条件. 因此,  $m=2$ .

(2) 当  $x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\right]$  时,  $f(x)$  的值域

为  $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$ , 则集合  $B = \left[\frac{1}{2}, 4\right]$ .

由题意知  $B \subsetneq A$ , 得

$$\begin{cases} 1-a < 3a+1, \\ 1-a < \frac{1}{2}, \\ 3a+1 \geq 4, \end{cases} \quad \text{解得 } a \geq 1,$$

所以实数  $a$  的取值范围为  $[1, +\infty)$ .

16. (1) 【解】根据题意, 函数  $f(x) =$

$\frac{x-m}{x^2+n}$  的图象关于原点对称,

则  $f(x)$  为奇函数.

若  $f(4) = \frac{1}{5}$ , 则  $f(-4) = -\frac{1}{5}$ ,

$$\text{则 } \begin{cases} f(4) = \frac{4-m}{16+n} = \frac{1}{5}, \\ f(-4) = \frac{-4-m}{16+n} = -\frac{1}{5}, \end{cases}$$

解得  $\begin{cases} m=0, \\ n=4. \end{cases}$  则  $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$ , 经检

验, 函数  $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$  为奇函数,

故  $m=0, n=4$  满足题意.

(2) 【证明】由 (1) 得,  $f(x) =$

$\frac{x}{x^2+4}$ , 设  $0 < x_1 < x_2 \leq 2$ , 则  $f(x_1) -$

$$f(x_2) = \frac{x_1}{x_1^2+4} - \frac{x_2}{x_2^2+4} = \frac{(x_1-x_2)(4-x_1x_2)}{(x_1^2+4)(x_2^2+4)},$$

由于  $0 < x_1 < x_2 \leq 2$ , 则  $x_1 - x_2 < 0, 4 - x_1x_2 > 0$ , 则有  $f(x_1) - f(x_2) < 0$ , 即  $f(x_1) < f(x_2)$ , 则函数  $f(x)$  在  $(0, 2]$  上单调递增.

17. 【解】(1)  $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+1}$  是定义在区

间  $[-1, 1]$  上的奇函数, 则  $f(0) =$

$\frac{0+b}{0+1} = 0$ , 解得  $b = 0$ , 又  $f\left(\frac{1}{2}\right) =$

$\frac{2}{5}$ , 则  $\frac{\frac{1}{2}a}{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1} = \frac{2}{5}$ , 解得  $a = 1$ , 所

以  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ . 经检验, 函数

$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$  为奇函数, 故

$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ .

(2) 不等式  $f(x-1) < f(-x)$ , 因为  $f(x)$  是定义在区间  $[-1, 1]$  上的增

函数, 所以  $\begin{cases} -1 \leq x-1 \leq 1, \\ -1 \leq -x \leq 1, \\ x-1 < -x, \end{cases}$  解得

$0 \leq x < \frac{1}{2}$ , 所以原不等式的解集为  $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ .

18. 【解】(1) 根据题意, 当  $x > 0$  时,

$-x < 0, f(-x) = -x^2 - 2x + 4$ .

又  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数,

则  $f(x) = f(-x) = -x^2 - 2x + 4$ ,

故当  $x > 0$  时,  $f(x) = -x^2 - 2x + 4$ .

综上,  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上的解析式为

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 4, & x \leq 0, \\ -x^2 - 2x + 4, & x > 0. \end{cases}$$

(2) 由 (1) 可得, 当  $x \in [1, 5]$  时,

$f(x) = -x^2 - 2x + 4$ , 则  $g(x) = f(x) +$

$(4a-4)x = -x^2 + (4a-6)x + 4$ .

$\therefore$  二次函数  $y = -x^2 + (4a-6)x + 4$

的图象开口向下, 且对称轴方程

为  $x = 2a-3$ ,  $\therefore$  分 3 种情况讨论:

① 当  $2a-3 \leq 1$ , 即  $a \leq 2$  时,  $g(x)$

在  $[1, 5]$  上单调递减,

$\therefore g(x)_{\max} = g(1) = 4a-3$ ;

② 当  $1 < 2a-3 < 5$ , 即  $2 < a < 4$  时,

$g(x)$  在  $(1, 2a-3)$  上单调递增, 在

$(2a-3, 5)$  上单调递减,  $\therefore g(x)_{\max} =$

$g(2a-3) = 4a^2 - 12a + 13$ ;

③ 当  $2a-3 \geq 5$ , 即  $a \geq 4$  时,  $g(x)$

在  $[1, 5]$  上单调递增,

$\therefore g(x)_{\max} = g(5) = 20a-51$ .

综上, 当  $a \leq 2$  时,  $g(x)_{\max} = 4a-3$ ;

当  $2 < a < 4$  时,  $g(x)_{\max} = 4a^2 - 12a + 13$ ;

当  $a \geq 4$  时,  $g(x)_{\max} = 20a-51$ .

19. 【解】(1) 令  $x=y=0$ , 则  $f(0+0) = 2f(0)$ , 所以  $f(0) = 0$ ,  $f(x)$  为奇函数, 证明如下:

令  $y = -x$ , 则  $f(x-x) = f(x) + f(-x) = f(0) = 0$ , 所以  $f(x) = -f(-x)$  对任意  $x \in \mathbf{R}$  恒成立, 所以函数  $f(x)$  为奇函数.

(2)  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上是减函数, 证明如下:

任取  $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$  且  $x_1 < x_2$ , 则  $x_2 - x_1 > 0, f(x_2) - f(x_1) = f(x_2) + f(-x_1) = f(x_2 - x_1) < 0$ , 所以  $f(x_2) < f(x_1)$ , 所以  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上是减函数.

当  $x \in [-3, 3]$  时,  $f(x)$  单调递减, 所以当  $x = -3$  时,  $f(x)$  有最大值为  $f(-3)$ , 因为  $f(3) = f(2) + f(1) = 3f(1) = -2 \times 3 = -6$ , 所以  $f(-3) = -f(3) = 6$ , 故  $f(x)$  在区间  $[-3, 3]$  上的最大值为 6.

(3) 由 (2) 知  $f(x)$  在区间  $[-1, 1]$  上单调递减, 所以  $f(x) \leq f(-1) = -f(1) = 2$ .

因为  $f(x) < m^2 - 2am + 2$  对所有的  $x \in [-1, 1], a \in [-1, 1]$  恒成立, 即  $m^2 - 2am > 0$  对任意  $a \in [-1, 1]$  恒成立, 令  $g(a) =$

$-2ma + m^2$ , 则  $\begin{cases} g(-1) > 0, \\ g(1) > 0, \end{cases}$  即

$\begin{cases} 2m + m^2 > 0, \\ -2m + m^2 > 0, \end{cases}$  解得  $m > 2$  或  $m < -2$ .

故实数  $m$  的取值范围为  $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ .